08130

TRISECTION
DE L'ANGLE,

PAR L. P. V. M. AZEMAR,

Ancien Chef du Bureau des Ponts et Chaussées, au Ministère de l'Intérieur;

SUIVIE DE RECHERCHES ANALYTIQUES

SUR LE MÊME SUJET,

PAR J. G. GARNIER,

Ancien Professeur à l'École Polytechnique et Instituteur à Paris.

PARIS,

Chez COURCIER, Imprimeur-Libraire, quai des Augustins, n° 57.

AN 1809.

Ouvrages de M. GARNIER, *qui se trouvent chez* M. COURCIER, *Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins*, n° 57.

Traité d'Arithmétique à l'usage d'Elèves de tout âge, seconde édition, vol. in-8°, 1808, 2 l. 10 s.

Elémens d'Algèbre à l'usage des Aspirans à l'Ecole Polytechnique, première section, seconde édition, 1 vol. in-8°, 5 l.

Suite de ces *Elémens*, deuxième section, analyse algébrique, seconde édition, la première ayant paru format in-4°, 1 vol. in-8°, 4 l.

Les Réciproques de la Géométrie, suivies d'un Recueil de Problèmes et de Théorèmes, et de la construction des Tables Trigonométriques, vol. in-8°, 1807, 3 l. 10 s.

Elémens de Géométrie analytique, ouvrage de 300 pages, vol. in-8°, avec 9 planches, 4 l.

Notes sur l'Algèbre de Bezout, y compris l'Algèbre, vol. in-8°. 5 l.

Notes sur le Calcul différentiel et intégral, du même Auteur, faisant 1 vol. in-8° séparé, 6 l.

Notes sur le premier volume *de l'Algèbre d'Euler*; le second volume contient les notes du Sénateur Lagrange, 12 l.

Recherches analytiques sur la Trisection de l'angle,

AVERTISSEMENT.

La Trisection de l'angle ou de l'arc qui en est la mesure, en n'employant que la règle et le compas, est un problème dont la solution rigoureuse est, depuis long-temps, regardée comme impossible.

Mais quelques Géomètres l'ont rendue plus accessible, en la faisant consister dans la description, par un mouvement continu, d'une courbe au moyen de laquelle on puisse obtenir le tiers d'un arc quelconque : en écartant ainsi la condition fâcheuse de ne faire usage que de la règle et du compas, ils ont laissé, sous l'autre condition, pleine liberté dans le choix des moyens.

Nous aurions donc complètement rempli leur intention, puisque *la courbe trisectrice* se décrit en même temps que la circonférence dans laquelle on opère la trisection des arcs, circonférence qui est ici la directrice du mouvement.

Il nous en aurait peu coûté d'imaginer, à l'effet de faciliter la description de cette courbe, *un compas trisecteur* d'une construction fort simple, puisque, dès nos premières recherches, nous en avons conçu et fait exécuter un très-peu composé; mais nous sommes dispensés de le faire connaître

ici, parce que, même à ne considérer la chose que graphiquement, il est beaucoup plus expéditif de procéder par tâtonnement, si ce n'est cependant dans le cas où on aurait à diviser une plateforme, ou le limbe d'un instrument.

Le problème inverse, c'est-à-dire la question de faire un arc triple d'un autre, sans cependant porter deux fois bout à bout d'elle-même sur la circonférence, la corde de l'arc simple, nous a fourni deux constructions de la courbe trisectrice, l'une par points, l'autre par un mouvement continu.

La courbe trisectrice, pour être complète, doit opérer la division des arcs de zéro à trois circonférences, c'est-à-dire qu'un même point de la trisectrice doit donner, pour un arc défini par sa corde, les cordes du tiers de cet arc, du tiers de cet arc plus la circonférence, et enfin du tiers du même arc plus deux circonférences. A ces arcs de zéro à une, à deux et à trois circonférences, considérés comme arcs triples, correspondent des portions bien distinctes de la trisectrice, portions qui n'ont été trouvées que successivement, parce qu'on ne s'était d'abord proposé la trisection des angles que sous l'aspect graphique, et qu'ainsi il suffisait d'aller, en arcs triples, de zéro à une demi-circonférence. Enfin nous avons donné à la solution toute l'étendue que réclame l'Analyse, et que la Géométrie révélait.

Cette courbe nous a servi à évaluer de deux manières, les cordes des arcs successifs, en parties

du rayon; elle nous a fourni plusieurs autres propriétés collatérales que nous avons consignées dans cet Écrit.

La description de cette courbe par le mouvement continu, donne naissance à une autre courbe symétrique comme elle, par rapport au même axe, mais plus simple que la trisectrice, et qu'on peut aussi faire servir à la trisection de l'angle. Nous avons fait connaître une autre génération, de laquelle nous pouvions attendre la solution géométrique du problème des tangentes; mais nous n'avons pu démontrer, en rigueur, que la ligne que nous annonçons comme tangente, laisse au-dessous d'elle tous les points de la courbe voisins du point commun, et comme cette prétendue tangente est toujours perpendiculaire à une ligne dont l'extrémité décrit la trisectrice, nous étions ramenés à prouver que cette ligne, dans toutes ses positions, passait par les centres des cercles osculateurs de la trisectrice. Au reste, comme l'Analyse nous avait donné une valeur de la sous-tangente, facile à construire, nous avons peu insisté sur la solution par la Géométrie.

Nous ferons connaître aussi brièvement qu'il nous sera possible, la partie analytique de cet Écrit: d'abord nous avons déduit de la propriété de chacun des points de la trisectrice, l'équation de la trisection de l'angle, dont les trois racines réelles sont les cordes ou les cosinus des tiers de trois arcs donnés par la même corde ou par le même cosinus; puis nous avons recherché et discuté les équations aux

coordonnées polaires et rectangulaires de cette courbe. La première est $z = 2\cos\varphi \pm 1$, z étant le rayon vecteur, φ l'angle qu'il fait avec un axe symétrique, dans la trisectrice, et l'unité le rayon du cercle dans lequel on opère la trisection des angles. La seconde est du quatrième degré, mais résoluble, quant à l'ordonnée y, à la manière du second, parce qu'en effet, à une abscisse, au moins dans une certaine digression, répondent toujours quatre ordonnées égales deux à deux; deux de ces ordonnées s'anéantissent pour des abscisses plus grandes que le diamètre de la petite feuille. Nous avons tiré de ces équations toutes les affections de la courbe, c'est-à-dire que nous avons donné les formules des sous-tangentes, des rayons de courbure, les élémens de l'équation de la développée, la formule des aires, etc., et nous avons étendu toutes ces recherches à la courbe qui, comme nous l'avons dit plus haut, est décrite en même temps que la trisectrice. Par rapport à celle-ci, nous avons trouvé que la moitié de son aire est la moitié de l'aire d'une cycloïde qui aurait pour cercle générateur celui dans lequel on opère la trisection des arcs. Ce chapitre est terminé par l'examen des racines de cette équation :

$$x^3 - 3r^2x + r^2 \cdot 2r\left(\frac{P-S}{P+S}\right) = 0,$$

dans laquelle P et S représentent le grand et le petit segment d'une sphère, et x la flèche, à

compter du centre. Ces racines sont données par la trisectrice : l'une, la plus petite, résout la question dans la sphère, lorsque les deux autres sont les flèches des deux segmens d'un hyperboloïde engendré par la révolution d'une hyperbole équilatère autour de son grand axe, segmens dont la somme des volumes est égale à celui de la sphère qui a ce même grand axe pour diamètre, ou qui est engendrée en même temps par la circonférence décrite sur le grand axe.

Ce petit Ouvrage laisse à desirer plus de méthode dans la partie géométrique, et plus de recherches dans la partie analytique; mais nous observerons que nous avons présenté les choses dans l'ordre suivant lequel nous les avons trouvées, et avec toute la prolixité de l'invention. Cet écrit ne doit être considéré que comme le premier jet d'un travail moins étendu et plus complet, auquel nous nous livrerons avec plaisir si cette petite production est favorablement accueillie: d'ailleurs nous serions encouragés par-là à terminer et à livrer à l'impression des recherches de même genre, sur la question de la duplication du cube.

La partie géométrique de ce travail est due à L. P. V. M. Azemar, ancien Chef du Bureau des Ponts et Chaussées au Ministère de l'Intérieur, et la partie analytique, c'est-à-dire, le dernier chapitre, est de J. G. Garnier, ancien Professeur à l'École Polytechnique, et Instituteur à Paris.

J. G. Garnier.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

CHAP. Ier. PRINCIPES d'après lesquels on obtient le triple d'un arc quelconque jusqu'à celui de 120° (133°,33 etc.) inclusivement, pag. 1

II. Formation de la courbe trisectrice, et moyen de décrire sa première portion d'un mouvement continu, 13

DEUXIÈME PARTIE.

III. Examen des abscisses et des ordonnées à la courbe trisectrice; leur valeur relative, ainsi que celle des hypoténuses des triangles rectangles formés des ordonnées et de leurs abscisses, 25

IV. Nouvelle proportion géométrique continue, 35

TROISIÈME PARTIE.

V. Nouveau point-de-vue sous lequel on peut considérer le moyen d'obtenir le tiers d'un arc jusqu'à 180° (200°). Formation d'une courbe à cet effet, qui fait suite à la courbe trisectrice, qui la complète, et qui se décrit aussi d'un mouvement continu, 42

VI. Examen des abscisses et des ordonnées à cette dernière portion de la courbe trisectrice; leur valeur relative et celle des hypoténuses des triangles rectangles formés soit des ordonnées et de leurs abscisses, soit des ordonnées et de leurs *abscisses augmentées* de la longueur du rayon, 52

VII. Examen d'une partie de la seconde portion de la courbe trisectrice: valeur relative des abscisses et des ordonnées à cette partie de la courbe, ainsi que celle des hypoténuses des triangles rectangles formés des ordonnées et de leurs abscisses, 69

VIII. Formation de la troisième portion de la courbe trisectrice, par la première des deux méthodes que l'on a enseignée, pour avoir le triple d'un arc. Examen de la valeur des angles dont le sommet est sur la courbe trisectrice, et dont les deux côtés passent toujours, l'un, par le point d'origine de la courbe, et l'autre, par le point fixe directeur du diamètre mobile. Propriétés générales de la courbe trisectrice, 76

IX. Quelques réflexions sur la courbe trisectrice et sur sa seconde propriété générale, 87

X. Application de l'analyse aux considérations précédentes, 93

ERRATA.

Pag. 15, lig. 17; au lieu de *ARM*, lisez *AMR*
— 64, — 26; *après*, abscisse *AF ajoutez*: (plus le rayon *AB*)
— 65, — 23; *après*, abscisses *ajoutez*: plus le rayon

TRISECTION

DE L'ANGLE.

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.

Principes d'après lesquels on obtient le triple d'un arc quelconque jusqu'à celui de 120° (133°,33 *etc.*) *inclusivement.*

PREMIERE PROPOSITION.

1. (Fig. 1). Soit le triangle isoscèle *ABC* dont l'angle *B* est moindre de 60° (66°,66 etc.); si du sommet *A* de l'un quelconque des deux angles formés sur la base *AC*, comme centre, avec une ouverture de compas égale à la base *AC*, pour

rayon, l'on décrit un arc qui coupe en un point E le côté BC opposé à l'angle A, et que par le point A et le point E l'on mène la ligne AE, le nouveau triangle CAE est semblable au triangle ABC.

Démonstration. Le triangle CAE est isoscèle; car par la construction les deux côtés AE et AC sont égaux, étant rayons du même cercle; mais les triangles isoscèles CAE et ABC, ayant un angle commun en C sur leurs bases, ont nécessairement tous leurs angles égaux chacun à chacun; donc ces deux triangles sont semblables.

2. Si l'on conçoit que l'angle ABC, du triangle isoscèle ABC, aille en diminuant par le mouvement du côté BC tournant sur le point B comme pivot, il est évident, 1°. que l'angle ABC devenant plus petit, l'angle CAE, qui lui est toujours égal par la construction, le devient aussi; 2°. que les deux triangles isoscèles semblables ABC et CAE fournissant toujours cette proportion $AC:AB::CE:AC$, la base AC diminue, relativement au côté AB, dans la même proportion que la base CE, relativement au côté AC, et conséquemment que le point C s'approchant du point A, le point E s'approche en même temps du point C, jusqu'au moment où l'angle ABC devenant zéro, les points E et C se confondent avec le point A.

Si l'on conçoit aussi que l'angle ABC aille en augmentant jusqu'à 60° (66°, 66 etc.), il est évident que le même raisonnement, fait dans l'hypothèse de la diminution de l'angle ABC, s'applique à son

augmentation ; conséquemment que le point C s'éloignant du point A, le point E s'éloigne du point C, de manière que les bases AC et CE deviennent égales entr'elles et égales aux côtés AB et BC, lorsque l'angle ABC est arrivé à 60° (66°,66 etc.) (fig. 2), ce qui donne le triangle équilatéral ABC.

La vérité de la proposition que l'on vient de démontrer, s'applique également à tout triangle isoscèle quelconque, dont l'angle au sommet serait plus grand que 60° (66°,66 etc.); c'est une conséquence évidente de la construction indiquée (1), puisque les deux triangles isoscèles ont toujours un angle commun sur leurs bases. L'on remarquera seulement que dans ce cas (fig. 6 et 7) l'arc, décrit du point A comme centre avec la longueur de la base AC pour rayon, ne peut plus rencontrer le côté BC que sur son prolongement, puisque la base AC qui sert de rayon, se trouvant la corde d'un arc au-dessus de 60° (66°,66 etc.), est nécessairement plus grande que l'un des deux côtés AB ou BC du triangle isoscèle ABC.

SECONDE PROPOSITION.

3. (Fig. 3). Dans le triangle isoscèle BAC; si du sommet A de l'angle compris entre les deux côtés égaux, comme centre, avec une longueur quelconque AE pour rayon, de manière cependant que ce rayon soit plus petit que l'un des deux côtés égaux du triangle, et plus grand que la perpendiculaire

AO menée du sommet *A* sur la base *BC*, l'on décrit un arc de cercle *ENIR* qui coupe nécessairement la base *BC* en deux points *N* et *I*, les longueurs *BI* et *CN*, comprises entre les points de section sur la base *BC* et les extrémités *B* et *C* de cette base, sont égales.

Démonstration. Par la construction, dans le triangle isoscèle *BAC*, l'égalité des côtés *AB* et *AC*, et de leurs parties *AE* et *AR*, fournit la proportion *AR* : *AB* :: *AE* : *AC*; donc si par les points *E* et *R* l'on mène la ligne *ER*, cette ligne est parallèle à la base *BC*; donc les arcs *EN* et *IR*, appartenant à la même circonférence et compris entre ces deux parallèles, sont égaux. Si du centre *A* de l'arc *ENIR*, on mène aux points de section *N* et *I* les rayons *AN* et *AI*, l'on a les triangles égaux *BAI* et *CAN*, puisque, par la construction, ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; donc le côté *BI* égale le côté *CN*. Tout triangle isoscèle quelconque étant susceptible de la même opération et de la même démonstration, il est évident que la proposition que l'on vient de démontrer est indépendante de la grandeur quelconque, soit des côtés du triangle, soit de l'angle compris entre les deux côtés égaux, et que par conséquent elle est générale.

De chacune des deux propositions précédentes, l'on déduit une méthode pour obtenir le triple d'un arc donné, depuis le plus petit jusqu'à celui de 120° (133°,33 etc.), sans être obligé de porter sur

la circonférence, à la suite de l'arc donné, deux fois la corde de cet arc ; et la méthode déduite de la première proposition, sert constamment de preuve à l'autre méthode.

Pour la plus grande intelligence de la formation de la courbe que l'on se propose de décrire, et qui sert à obtenir le tiers de la circonférence de cercle et d'un arc quelconque, l'on divisera en deux parties l'application des deux méthodes que l'on va donner ; la première application se fera aux arcs jusqu'à 60° (66°,66 etc.), et la seconde aux arcs, depuis 60° (66°,66 etc.) jusqu'à 120° (133°,33 etc.) inclusivement.

Pour avoir le triple des arcs, depuis le plus petit jusqu'à celui de 60° (66°,66 *etc.*) *inclusivement.*

PREMIÈRE MÉTHODE.

4. (Fig. 4.) Soient les deux triangles isoscèles semblables *ABC* et *CAE* construits comme il est dit n° 1, et dont l'angle au sommet est d'une grandeur quelconque entre le plus petit angle et celui de 60° (66°,66 etc.) : si du sommet *B* du triangle *ABC*, comme centre, avec la longueur de l'un des deux côtés égaux *AB* ou *BC* pour rayon, l'on décrit la demi-circonférence *ACOR*, et que l'on prolonge le côté *AE* du triangle isoscèle *CAE* jusqu'à la rencontre en *O* de cette demi-circonférence, l'arc *ACO* sera triple de l'arc *AC*.

Démonstration. L'arc AC sert de mesure à l'angle au centre ABC; la moitié de l'arc CO sert de mesure à l'angle CAO dont le sommet est à la circonférence : les angles ABC et CAE ou CAO sont égaux par la construction (1) : donc l'arc CO est double de l'arc AC; donc l'arc ACO est triple de l'arc AC.

D'après ce qui a été dit (2), l'on voit 1°. que si l'angle ABC diminue, l'angle CAE, qui lui est toujours égal, diminue d'un même nombre de degrés; que par conséquent l'arc CO (dont la moitié sert de mesure à l'angle CAE) est toujours double de l'arc AC servant de mesure à l'angle ABC, et que par suite l'arc ACO est toujours triple de l'arc AC; 2°. qu'il en est de même si l'angle ABC augmente jusqu'à 60° (66°,66 etc.) (fig. 5), position dans laquelle les deux triangles isoscèles ABC et CAE se trouvant convertis en un seul triangle équilatéral ABC, l'arc CR est double de l'arc AC, et l'arc ACR est triple de l'arc AC.

L'on peut donc obtenir le triple d'un arc quelconque AC de 60° (66°,66 etc.), et au-dessous, 1°. en cherchant le centre B de cet arc; 2°. en tirant, du centre B vers l'extrémité C de l'arc AC, le rayon BC; 3°. en décrivant de l'autre extrémité A de cet arc, comme centre, avec la longueur AC de sa corde pour rayon, un arc de cercle qui coupe en un point E le rayon BC; 4°. en menant par les points A et E une ligne qui détermine au point O, sur la circonférence décrite du centre B avec BC pour rayon, un arc ACO triple de l'arc AC.

SECONDE MÉTHODE.

5. (Fig. 4.) Si du point A comme centre, avec AB ou BC pour rayon, l'on décrit la demi-circonférence $BIDX$, égale par la construction à celle $ACOR$: si l'on prolonge le côté BC jusqu'à la rencontre en P de la demi-circonférence $BIDX$, il arrive que sur la ligne BP, la partie PE égale celle BC, c'est-à-dire le rayon.

Démonstration. Si du centre A l'on mène au point P le rayon AP, il est évident que le triangle BAP est isoscèle par la construction, et que (3) sa base BP se trouve coupée aux points C et E, par l'arc décrit du sommet A, de l'angle BAP, comme centre avec AC pour rayon, de manière que BE égale PC; mais BE plus CE égale BC; donc PC plus CE, c'est-à-dire PE, égale le rayon BC.

Comme la même construction peut être faite, quelque grandeur que puisse avoir l'arc AC, depuis le plus petit jusqu'à celui de 60° (66°,66 etc.), et que la même démonstration s'y applique, l'on voit évidemment, 1°. qu'au lieu de déterminer le point E sur le côté BC par la première méthode, on l'obtient aussi en prolongeant le côté BC jusqu'à la rencontre en P de la demi-circonférence $BIDX$, et en portant la longueur du rayon BC sur PB, de P en E; 2°. que le point E étant ainsi déterminé, il ne s'agit plus, pour avoir le triple de l'arc AC, que de mener par les points A et E une ligne qui, etc.

L'on observera, 1°. qu'à mesure que l'angle ABC augmente, à partir du plus petit angle, par le mouvement du rayon BC tournant sur le point B comme pivot, le prolongement CP va toujours en diminuant, et que le point P s'approche progressivement du point C, jusqu'à ce que l'angle ABC arrivant à 60° (66°,66 etc.) (fig. 5), les deux points P et C se confondent dans la commune intersection C des deux demi-circonférences; 2°. que dans le mouvement du rayon BC (fig. 4), son prolongement CP allant en diminuant, comme, pour déterminer le point E sur BC, l'on porte toujours la longueur du rayon BC de P en E, alors le point E s'approche aussi d'une manière progressive du point B, jusqu'à ce que, par le mouvement de BC, l'arc AC (fig. 5) ayant acquis 60° (66°,66 etc.), et le point P se confondant avec le point C, le point E se confond aussi avec le point B.

D'où il suit que dans la position du rayon BC, formant avec AB un angle de 60° (66°,66 etc.), le prolongement de BC ayant disparu, et le point E s'étant réuni au point B, c'est du point C (représentant le point P) qu'il faut porter sur BC de C en B (qui représente le point E), la longueur du rayon BC, afin de déterminer sur BC, un point B, par lequel et le point A, tirant une ligne, l'on obtient, etc.

Pour avoir le triple des arcs, depuis 60° (66°,66 *etc.*) *jusqu'à* 120° (133°,33 *etc.*) *inclusivement.*

PREMIÈRE MÉTHODE.

6. Si l'on conçoit que l'angle *ABC* (fig. 4) qui, par le mouvement de *BC* sur le centre *B* comme pivot, est arrivé (fig. 5) à l'angle de 60° (66°,66 etc.), augmente progressivement jusqu'à 120° (133°,33 etc.), et si, en le supposant d'une grandeur quelconque (fig. 6) entre 60° (66°,66 etc.) et 120° (133°,33 etc.), après avoir tiré la corde *AC* de l'arc servant de mesure à cet angle, l'on fait sur le triangle isoscèle *ABC* l'opération décrite au n° 1, il est évident, ainsi qu'on l'a remarqué au n° 2, que l'arc décrit du point *A* comme centre avec la corde *AC* pour rayon, ne peut plus rencontrer ou couper le côté *BC*, en un point *E*, que sur son prolongement selon la direction *CB*.

D'après cette hypothèse et cette construction, si par les points *A* et *E* l'on mène une ligne, elle coupe au point *O* la circonférence *ACRO* (décrite du sommet *B*, du triangle isoscèle *ABC*, comme centre avec *AB* ou *BC* pour rayon), de manière que l'arc *ACRO* est triple de l'arc *AC*.

Démonstration. Par la construction, les triangles isoscèles *ABC* et *CAE* ont un angle commun en *C* sur leurs bases; donc ces deux triangles sont sem-

blables ; donc l'angle *ABC* égale celui *CAE* ; donc l'arc *AC*, servant de mesure à l'angle au centre *ABC*, égale la moité de l'arc *CRO* compris entre les côtés de l'angle à la circonférence *CAE* ou *CAO* ; donc l'arc *ACRO* est triple de l'arc *AC*.

En supposant que, par le mouvement du rayon *BC*, l'angle *ABC* arrive à 120° (133°,33 etc.) (fig. 7) ; après avoir tiré la corde *AC* de l'arc qui lui sert de mesure, si l'on fait sur le triangle isoscèle (par la construction) *ABC* l'opération indiquée au n° 1, l'on voit que, les deux triangles isoscèles *ABC* et *CAE* ayant leurs angles égaux chacun à chacun, l'arc *CRPA*, qui sert de mesure à l'angle *CAE* dont le sommet est à la circonférence, est double de l'arc *AC*, qui sert de mesure à l'angle homologue au centre *ABC*, et que par conséquent l'arc *ACRPA* est triple de l'arc *AC* ; mais l'arc *AC* est de 120° (133°,33 etc.) ; donc l'arc *ACRPA* est de 360° (400°), c'est-à-dire, est la circonférence : d'où il suit que l'angle *ABC* arrivant à 120° (133°,33 etc.), la ligne tirée par le point *A* et par le point *E* cesse de couper la circonférence pour lui devenir tangente au point *A*, et conséquemment être perpendiculaire sur *AB*.

L'on doit conclure que, pour avoir le triple d'un arc quelconque depuis 60° (66°,66 etc.) jusqu'à 120° (133°33 etc.) inclusivement, il faut opérer comme il est dit au n° 4, en observant de prolonger le côté *BC*.

SECONDE MÉTHODE.

7. (Fig. 6.) Si du point *A* comme centre avec le rayon *AB*, l'on décrit la circonférence *BIDXS* qui coupe, aux points *P* et *B*, la base *CE* du triangle isoscèle *CAE*, la partie *PE* de cette base est égale au rayon *BC*.

Démonstration. Si du centre *A* au point de section *P* l'on tire la ligne *AP*, il est évident, 1°. que *AP* égale *AB*, puisque ce sont deux rayons de même cercle; 2°. que la base *CE* du triangle isoscèle *CAE* est coupée (3) aux points *B* et *P*, de manière que *CP* égale *BE*; mais *CP* plus *BP* (=*BC*), égale *BE* plus *BP*; donc la partie *PE* de la base *CE* égale le rayon *BC*.

L'on prouvera de même (3), pour l'angle *ABC* de 120° (133°,33 etc.) (fig. 7), que sur la base *CE*, du triangle isoscèle *CAE*, la partie *PE* égale celle *BC*, c'est-à-dire le rayon.

On observera (fig. 6) que dans l'augmentation de l'angle *ABC* jusqu'à 90° (100°), c'est toujours le côté *BC* qui est coupé en un point *P* par la circonférence *BIDXS*, et que cette même circonférence (fig. 7) ne coupe plus que le prolongement de *BC* (dans la direction *CB*) aussitôt que l'angle surpasse 90° (100°) : cela est évident.

L'on conclura donc, 1°. que, pour avoir le triple d'un arc quelconque depuis 60° (66°,66 etc.) jusqu'à 90° (100°), on obtient ce triple (fig. 6), en portant

la longueur du rayon BC sur le côté BC prolongé ; à partir du point P (où le côté BC est coupé par la circonférence $BIDXS$), de P en E, et menant ensuite par les points A et E une ligne qui, etc. ; 2°. que, pour avoir le triple des arcs depuis 90° (100°) jusqu'à 120° (133°,33 etc.) inclusivement (fig. 7), il faut porter la longueur du rayon BC sur le prolongement de BC, à partir du point P (où ce prolongement est coupé par la circonférence $BIDXS$), de P en E, et mener par les points A et E une ligne qui, etc.

A l'égard de l'arc de 90° (100°), il est évident que le côté BC, ou son prolongement, est alors tangent au point B de la circonférence $BIDXS$, et que c'est du point B qu'il faut porter sur le prolongement de BC la longueur du rayon BC, puisque BC plus BC forment la longueur du diamètre soutenant un arc de 180° (100°) double de celui donné de 90° (100°).

D'après ce qui a été démontré, il est évident que chacune des deux propositions que l'on a établies, fournit une méthode pour obtenir le triple d'un arc quelconque, depuis le plus petit jusqu'à celui de 120° (133°,33 etc.) inclusivement, et que la première méthode sert constamment de preuve à la seconde.

CHAPITRE II.

Formation de la Courbe trisectrice, et moyen de décrire sa première portion, d'un mouvement continu.

FORMATION DE LA COURBE.

Les deux méthodes que l'on a employées pour avoir le triple d'un arc, conduisent bien l'une et l'autre à déterminer tous les points d'une courbe, qui sert à obtenir rigoureusement le tiers de la circonférence de cercle et celui d'un arc quelconque; mais la seconde méthode a cela de particulier et d'avantageux, qu'en faisant voir la formation de la courbe, elle indique en même temps le moyen de la décrire d'un mouvement continu : l'on va donc se servir de la seconde méthode pour sa description; et afin de ne pas compliquer les figures, on suivra le même ordre que l'on a adopté dans le chapitre premier, c'est-à-dire, que l'on démontrera la formation de la courbe en deux portions séparées, qui serviront à déterminer, la première, le tiers d'un arc quelconque depuis le plus petit jusqu'à celui de 180° (200°) inclusivement; la seconde,

le tiers d'un arc quelconque depuis 180° (200°) jusqu'à 360° (400°).

PREMIÈRE PORTION DE LA COURBE,

Pour les arcs depuis le plus petit jusqu'à celui de 180° (200°) *inclusivement.*

8. Soit la figure 8 de même construction que les fig. 4 et 5, mais sur laquelle, afin d'éviter la surcharge des lignes, l'on n'a fait qu'un petit nombre d'angles, et l'on n'a pas tracé les cordes des arcs AC, AC, etc., ni les côtés AP, AP, etc. des triangles isoscèles BAP, BAP, etc.

L'on voit sur cette figure le point E déterminé sur les côtés BC, BC, etc. (4 et 5), soit par la section des arcs décrits du point A comme centre avec les cordes AC, AC, etc. pour rayon, soit par la longueur du rayon BC portée de P en E.

Maintenant, si l'on conçoit le diamètre BAX glissant par son extrémité B sur le centre B, de manière que l'autre extrémité X suive exactement la demi-circonférence XDB jusqu'au point C [moment où ce diamètre a pris la position CBY, faisant avec sa moitié CB et le rayon AB un angle de 60° (66°,66 etc.)], et que pendant ce mouvement, le point A, milieu de ce diamètre, laisse une trace après lui, il est évident, 1°. que dans cette opération, le diamètre mobile BAX a formé avec le rayon AB tous les angles possibles, depuis le plus petit jusqu'à celui de 60° (66°,66 etc.) inclusivement, en rem-

plaçant constamment le côté BC de tous les triangles isoscèles possibles ABC, ABC, etc., et a déterminé en même temps, sur l'arc AC de 60° (66°,66 etc.), tous les arcs qui servent de mesure à ces angles ; 2°. que dans le mouvement du diamètre BAX, la longueur XA étant toujours égale au rayon BC, et par conséquent à PE, PE, etc., la trace du point A passe par tous les points E, E, etc. que l'on puisse concevoir, jusqu'à ce qu'enfin le point X arrivant au point C, le point A arrive en même temps au centre B.

Le point E (4 et 5), situé sur le côté BC d'un angle quelconque ABC de 60° (66°,66 etc.) et au-dessous mesuré par un arc AC, servant à établir le triple de cet arc, en tirant par le point A et le point E une ligne qui, par sa section avec la demi-circonférence ARM, détermine au point O un arc ACO triple de l'arc AC, il est évident que cette ligne AO est la corde de l'arc triple, et que cette corde AO passe par le point E; mais comme la trace laissée par le point A, dans le mouvement du diamètre BAX, passe aussi par le point E, il est encore évident que la section commune de la corde AO et du côté BC de l'angle quelconque ABC, avec la trace laissée (ou la courbe décrite) par le point A, n'est autre chose que le point E: d'où il résulte nécessairement que la courbe décrite par le point A détermine sur la corde AO, d'un arc quelconque ACO de 180° (200°) et au-dessous, un point E, par lequel et le centre B tirant une ligne, qui coupe en un point C l'arc quelconque

ACO, l'on obtient un arc *AC* qui est le tiers de l'arc *ACO*.

Le point *E* étant déterminé sur les cordes *AO*, *AO*, etc., par la courbe que décrit le point *A*, et la partie *AE* de chacune de ces cordes étant, par la construction (4 et 5), toujours égale à la corde du tiers de l'arc soutenu par la corde *AO*, il est évident que la corde d'un arc quelconque, menée du point *A* vers la demi-circonférence *AMR*, est coupée par la courbe que trace le point *A*, de manière que la partie de la corde, comprise entre le point *A* et cette courbe, est toujours égale à la corde du tiers de l'arc.

SECONDE PORTION DE LA COURBE,

Pour les arcs depuis 180° (200°) *jusqu'à* 360° (400°) *inclusivement.*

9. Soit la figure 9 de même construction que les figures 6 et 7, mais sur laquelle, pour éviter aussi la confusion des lignes, l'on n'a pas tracé les cordes des arcs *AC*, *AC*, etc., ni les rayons *AP*, *AP*, etc., et où l'on a ponctué, sur le côté *BC* et sur son prolongement, les portions qui ne font point partie intégrante du diamètre en mouvement.

Dans cette figure, on voit le point *E* déterminé (6 et 7) sur le prolongement du côté *BC* des triangles isoscèles *ABC*, *ABC*, etc., soit par la section des arcs décrits du point *A* comme centre avec les

cordes des arcs AC, AC, etc. pour rayon, soit par la longueur du rayon BC portée de P en E.

Si l'on conçoit que le diamètre BAX, qui dans son mouvement est arrivé à la position CBY, tourne sur le centre B comme pivot jusqu'à la position CBP, où sa moitié CB fait avec AB un angle de 120° (133°,33 etc.), il est évident, 1°. que dans ce mouvement de rotation, la partie CB de ce diamètre, ayant fait avec AB tous les angles possibles ABC, ABC, etc., depuis 60° (66°,66 etc.) jusqu'à 120° (133°,33 etc.) inclusivement, a déterminé en même temps, sur la demi-circonférence AMR, tous les arcs AC, AC, etc. qui servent de mesure à ces angles, et qu'il en est de même, si, au lieu de tourner sur le centre B, le diamètre continue à glisser sur ce centre, de manière que son extrémité X (représentée par C dans la position CBY) suive toujours la circonférence $XDBS$ de C en P (point inférieur d'intersection des deux circonférences), et que dans ce mouvement l'on suppose toujours le diamètre prolongé jusqu'à la rencontre en C, C, etc. de la demi-circonférence AMR, de sorte qu'il remplace constamment le côté BC et le prolongement de BC; 2°. que, concevant toujours que le point A, milieu de ce diamètre (représenté par le point B dans la position CBY), laisse pendant ce mouvement une trace après lui, comme la longueur XA est égale au rayon BC et par conséquent à PE, PE, etc., cette trace du point A passe par tous les points possibles E, E, etc., jusqu'à ce qu'enfin le point X arrivant au point P d'intersec-

tion inférieure des deux circonférences, le point *A* arrive en même temps au point *E* sur la tangente *EA* à la circonférence *AMRY*, et le diamètre prend la position *FEP*.

L'on remarquera, pour les arcs au-dessus de 270° (300°), que les cordes *AO*, *AO*, etc. ne sont plus coupées que sur leur prolongement, au point *E*, par la trace que laisse le point *A*; attendu que le point *E* n'est déterminé sur le prolongement de *BC*, que par la longueur de la corde du tiers de l'arc (6), et que les cordes des arcs entre 90° (100°) et 120° (133°,33 etc.) sont nécessairement plus grandes que les cordes du triple de ces arcs.

Le point *E* (6 et 7), situé sur le prolongement du côté *BC* d'un angle quelconque *ABC*, de 60° (66°,66 etc.) à 120° (133°,33 etc.) mesuré par un arc *AC*, servant à établir le triple de cet arc, en tirant par le point *A* et le point *E* une ligne qui, par sa section avec la circonférence *AMRY*, détermine au point *O* un arc *ACO* triple de l'arc *AC*; il est évident que cette ligne *AO* est la corde de l'arc triple, et que cette corde *AO* (ou son prolongement) passe par le point *E*; mais comme la trace laissée par le point *A* passe aussi par le point *E*, il est encore évident que la section commune du prolongement de *BC* et de la corde *AO* (ou de son prolongement) avec la courbe tracée par le point *A*, n'est autre chose que le point *E*: d'où il résulte nécessairement que cette courbe détermine sur la corde *AO* (ou sur le prolongement de la corde) d'un arc

quelconque *ACO* de 180° (200°) à 360° (400°), un point *E*, par lequel et le centre *B* tirant une ligne qui coupe en un point *C* l'arc *ACO*, l'on obtient un arc *AC* qui est le tiers de l'arc *ACO*.

Le point *E* étant déterminé sur les cordes *AO*, *AO*, etc. ou sur leur prolongement, par la courbe que décrit le point *A*, et la partie *AE* de ces cordes ou de leur prolongement étant, par la construction (6 et 7), toujours égale à la corde du tiers de l'arc soutenu par la corde *AO*, il est évident que la corde d'un arc quelconque de 180° (200°) à 360° (400°), menée par le point *A* (ou que cette corde prolongée), est coupée par la courbe, de manière que la partie de cette corde, ou que cette corde plus la partie de son prolongement, comprise entre le point *A* et la courbe, est toujours égale à la corde du tiers de l'arc.

Tous les points *E*, *E*, etc. appartenant à la courbe tracée par le point *A*, l'on voit que la longueur de la tangente, au point *A* de la circonférence *AMRY*, comprise entre le point *A* et la courbe, est égale à la corde de l'arc qui est le tiers de la circonférence.

10. Dans le mouvement du diamètre *BAX* (fig. 8), prolongé lorsque cela est nécessaire (fig. 9), glissant toujours sur le centre *B*, de manière que son extrémité *X* suive exactement la circonférence *XDBS*, à partir du point *X* (fig. 8) jusqu'au point *P* (fig. 9) de l'intersection inférieure des deux circon-

férences où ce diamètre a pris la position *FEP*, le point *A*, milieu de ce diamètre, ayant laissé une trace au moyen de laquelle on peut obtenir le tiers d'un arc quelconque, depuis et y compris la circonférence jusqu'au plus petit arc imaginable, il est évident que cette trace du point *A* doit avoir rigoureusement pour dénomination le nom de courbe trisectrice, et que sa propriété consiste en ce que les lignes, tirées de son point d'origine *A* (8 et 9) vers tous ses autres points imaginables, sont égales aux cordes du tiers de tous les arcs possibles, depuis le plus petit jusqu'au plus grand, y compris la circonférence de cercle.

11. Après avoir démontré la formation de la courbe trisectrice, si l'on a bien saisi les principes d'après lesquels cette courbe se déploie (fig. 10) par le mouvement du diamètre *BAX*, dont on voit les principales positions, l'on doit sentir qu'elle peut être décrite d'un mouvement continu ; mais en ne considérant cette courbe que sous le point de vue de la trisection de l'arc ou de l'angle, on a pensé qu'il suffisait de tracer seulement la première portion de cette courbe, au moyen de laquelle on obtient le tiers d'un arc quelconque de 180° (200°) et au-dessous.

On aurait pu se borner pourtant à ne décrire que la portion de courbe nécessaire pour obtenir le tiers d'une partie quelconque de l'arc de 90° (100°); mais (fig. 11) il est évident, par le tracé de la courbe *AEFB*, que son intersection est mieux déterminée

avec les cordes des arcs au-dessus de 90° (100°), qu'avec les cordes des arcs au-dessous.

Ainsi donc, par exemple, si l'on desire avoir le tiers de l'arc RL plus petit que 90° (100°), l'on prendra le tiers ACF de l'arc $ACDL$ dont la corde est égale à AF, et la différence FG entre le tiers de cet arc et celui ACG de 60° (66°,66 etc.), qui est toujours connu, sera le tiers de l'arc RL; cela est évident.

Moyen de décrire, d'un mouvement continu, la première portion de la courbe.

12. Les détails dans lesquels on va entrer sur la manière de construire un instrument propre à remplir le but que l'on se propose, en donneront une idée assez exacte, pour faire apprécier la justesse rigoureuse des opérations auxquelles on pourra l'employer.

Comment exécuter (fig. 10) le mouvement du diamètre BAX glissant sur le centre B par une de ses extrémités, tandis que l'autre X suit la demi-circonférence XDB, et que son milieu A laisse une trace après lui?

La première idée qui se présente est d'avoir; 1°. un cylindre, et de le placer de façon que son axe soit fixé perpendiculairement au centre B; 2°. une règle un peu plus grande que le diamètre BAX, et construite de manière que dans le milieu

de sa longueur il y ait une rainure d'une largeur égale au diamètre du cylindre; qu'au point *A*, et dans le milieu de la largeur de la rainure, soit fixé au-dessous un petit stilet, et qu'il y en ait un autre, aussi en-dessous, au point *X*, ensorte que l'axe *B* du cylindre et les deux stilets *A* et *X* soient dans la même direction et à la distance exacte, les uns des autres, de la longueur du rayon *AB*.

Alors, qu'y aurait-il à faire pour décrire la partie de courbe *AAAAB*? Il faudrait conduire exactement le stilet *X* sur la portion *XDC* de la demi-circonférence *XDB*; la règle à rainure glisserait le long du cylindre, et le stilet *A* tracerait la courbe: assurément c'est bien là le diamètre *BAX* mis en mouvement, comme on l'a démontré, pour faire décrire la courbe par le point *A*.

Mais il se présente dans cette opération deux inconvéniens; le premier, c'est que le stilet *A* ne peut arriver jusqu'au point *B* qui est occupé par le cylindre; le second provient de la grande difficulté de conduire avec la main, d'une manière précise, le stilet *X* sur la demi-circonférence *XDB*: il faut donc y remédier.

Si l'on conçoit que le cylindre, dont l'axe est au point *B*, soit creux et ouvert d'un quart de circonférence dans sa hauteur du côté de la courbe à décrire, il est évident que le premier inconvénient disparaît, car alors le stilet *A* peut arriver jusqu'au point *B*.

Quant au second, supposons que le diamètre *BAX* soit la direction de la face perpendiculaire d'une règle sur le papier, et que le cylindre creux soit fixé sur cette règle et dans son épaisseur au point *B* : concevons un chevron à angle droit, dont l'extrémité de l'un des côtés est fixée perpendiculairement sur cette règle vis-à-vis le point *A*, et à une distance de ce point égale à la moitié de la largeur de la règle à rainure, et que sur l'autre côté horizontal du chevron, qui couvre le point *A*, il y ait un cylindre fixe et perpendiculaire dont l'axe corresponde au point *A*; que l'on supprime le stilet *X* de la règle à rainure, et que l'on établisse sur cette règle un cylindre dont l'axe soit perpendiculaire au point *X*.

Si l'on se représente maintenant la règle mobile à rainure placée sur l'autre règle qui reste fixe, de manière que le cylindre creux soit dans la rainure, le stilet *A* dessous le côté horizontal du chevron, et correspondant à l'axe du cylindre qui est par-dessus, ensorte que l'axe de chacun des trois cylindres et celui du stilet *A* soient dans la même direction, il est évident que si l'on réunit, par une verge horizontale, le cylindre placé sur le chevron et celui fixé au point *X* de la règle mobile, et qu'on fasse tourner cette verge, elle opère l'effet d'un compas ; le point *X* de la règle à rainure se meut circulairement, tandis que le stilet *A* décrit la courbe, et que la règle mobile glisse le long du cylindre.

Ainsi disparaissent les deux inconvéniens qui

s'étaient d'abord présentés, et la portion de courbe *AAB* peut être régulièrement décrite d'un mouvement continu.

Telles sont les bases de construction que l'on a adoptées pour le mécanisme de l'instrument que l'on a fait exécuter, au moyen duquel on obtient le tracé de la courbe le plus rigoureusement exact que l'on puisse desirer.

DEUXIÈME PARTIE.

CHAPITRE III.

Examen des abscisses et des ordonnées à la courbe trisectrice; leur valeur relative, ainsi que celle des hypoténuses des triangles rectangles formés des ordonnées et de leurs abscisses.

NOTA. Pour l'intelligence de la suite de l'Ouvrage, il est essentiel d'observer qu'étant obligé de considérer des arcs au-dessus de 90° (100°), on appellera, en général, sinus d'un arc jusqu'à 180° (200°), la ligne abaissée de l'extrémité de l'arc sur le diamètre, et sinus-verse de l'arc, la ligne comprise sur le diamètre entre l'origine de l'arc et le sinus de l'arc : à l'égard des cosinus, on n'a rien changé à leur définition connue, qui est celle de sinus du complément d'un arc. On appellera aussi supplément à 360° (400°), celui d'un arc au-dessus de 180° (200°).

EXAMEN DES ABSCISSES ET DES ORDONNÉES.

13. (Fig. 12). SOIT la courbe trisectrice *AIEC*; si, par les extrémités *C* et *A* de cette courbe, l'on mène la ligne *CQ* perpendiculaire au point *A* du

diamètre AR (6), et que pour chacune des deux parties AIB et $BEOC$ de cette courbe, l'on mène aussi par ses points I et E, les plus élevés au-dessus de AB et de AC, les lignes IL et ED perpendiculairement sur la ligne CQ et sur le diamètre AR, il est évident que les perpendiculaires abaissées de chacun des points de la courbe sur AD, seront les ordonnées qui auront pour axe la ligne CL, et que AD sera l'axe des abscisses.

Si, par le point A, l'on mène la corde AF qui, par sa section au point T avec la première portion de la courbe, détermine l'ordonnée TV et l'abscisse AV, cette ordonnée à la courbe et son abscisse sont homologues à l'arc AKF : il en est de même pour les arcs au-dessus de 180° (200°) ; les lignes MN et AN sont l'ordonnée à la courbe et son abscisse, homologues à l'arc $AKRP$.

TROISIÈME PROPOSITION.

14. Pour les arcs, depuis le plus petit jusqu'à celui de 180° (200°) :

1°. Le sinus de l'arc est à son sinus-verse, comme l'ordonnée homologue est à son abscisse ;

2°. Le sinus de l'arc est à sa corde, comme l'ordonnée homologue est à la corde du tiers de l'arc ;

3°. Le sinus-verse de l'arc est à sa corde, comme l'abscisse homologue est à la corde du tiers de l'arc.

Démonstration. (Fig. 12). Le sinus FG d'un arc

quelconque AKF, depuis le plus petit jusqu'à celui de 180° (200°), son sinus-verse AG, sa corde AF d'une part, et de l'autre l'ordonnée homologue TV, son abscisse AV et la corde AT du tiers de l'arc AKF, fournissant toujours, par la construction, les triangles semblables AGF et AVT, il en résulte les trois proportions suivantes $FG : AG :: TV : AV$; $FG : AF :: TV : AT$; $AG : AF :: AV : AT$. Donc, etc.

L'on remarquera, pour l'arc de 180° (200°) $AKFR$, que le sinus étant zéro, les triangles AGF et AVT ont disparu, ainsi que toute proportion.

QUATRIÈME PROPOSITION.

(Fig. 12). Pour les arcs, depuis 180° (200°) jusqu'à 360° (400°) :

1°. Le sinus du supplément à 360° (400°) de l'arc est à son sinus-verse, comme l'ordonnée homologue est à son abscisse;

2°. Le sinus du supplément à 360° (400°) de l'arc est à la corde du supplément, comme l'ordonnée homologue est à la corde du tiers de l'arc;

3°. Le sinus-verse du supplément à 360° (400°) de l'arc est à la corde du supplément, comme l'abscisse homologue est à la corde du tiers de l'arc.

Démonstration. Les sinus, les sinus-verse et les cordes des arcs au-dessus de 180° (200°), ne pouvant plus être regardés que comme ceux de leurs

supplémens à 360° (400°), il est évident que, pour un quelconque de ces arcs $AFRP$, la construction fournissant toujours les triangles semblables ASP et ANM, l'on a les trois proportions

$$PS : AS :: MN : AN ; \quad PS : AP :: MN : AM ;$$
$$AS : AP :: AN : AM.$$

Donc, etc.

L'on remarquera, pour l'arc de 360° (400°) ou la circonférence de cercle, que les triangles ASP et ANM ne pouvant plus avoir lieu, toute proportion cesse.

Valeur relative des ordonnées et des abscisses homologues aux arcs, depuis le plus petit jusqu'à celui de 270° (300°).

CINQUIÈME PROPOSITION.

15. L'ordonnée homologue est égale à la différence entre le sinus du tiers et celui des deux tiers de l'arc, et son abscisse est égale à la différence entre le sinus-verse du tiers et celui des deux tiers du même arc.

Démonstration pour les arcs jusqu'à 180° (200°).

(Fig. 13.) Par la construction, et d'après ce qui a été dit (8), le point E étant un des points de la courbe, et l'arc AS formant le tiers de l'arc quelconque, jusqu'à 180° (200°), ASC; si l'on divise les deux tiers restant SC en deux parties égales au

point F, l'arc ASF est les deux tiers de celui ASC: si, par les points de division S et F, l'on mène la corde SF, elle est parallèle à la corde AC, à cause des arcs égaux AS et FC: si, par les mêmes points S et F, l'on mène parallèlement aux côtés AO et CO du triangle rectangle AOC, les lignes SK et FK, il est évident que les triangles SKF et AOC sont semblables par la construction; si, par le point E de la courbe, l'on abaisse l'ordonnée EG, les triangles AGE et AOC étant (14) toujours semblables, il suit que les triangles SKF et AGE le sont toujours aussi; mais dans ces deux triangles semblables, les côtés homologues AE et SF (cordes du tiers de l'arc ASC) sont constamment égaux par la construction: donc ces deux trianglessont toujours égaux.

Le sinus SL, du tiers de l'arc ASC, plus FK, égale évidemment le sinus des deux tiers de cet arc; donc FK est la différence entre les sinus du tiers et des deux tiers de l'arc ASC; mais FK égale toujours EG; donc l'ordonnée homologue EG est égale à la différence entre les sinus du tiers et des deux tiers de l'arc quelconque ASC, jusqu'à 180° (200°).

Le sinus-verse AL, du tiers de l'arc ASC, plus SK, égale évidemment le sinus-verse des deux tiers de l'arc; donc SK est la différence entre les sinus-verse du tiers et des deux tiers de l'arc; mais dans les triangles égaux SKF et AGE, SK égale toujours AG; donc l'abscisse homologue AG est égale à la

différence entre les sinus-verse du tiers et des deux tiers de l'arc quelconque ASC, jusqu'à 180° (200°).

Il est évident, pour l'arc de 180° (200°), que l'ordonnée étant zéro, la différence entre les sinus du tiers et des deux tiers de l'arc est aussi zéro, et que l'abscisse étant égale au rayon, la différence entre les sinus-verse du tiers et des deux tiers de l'arc est aussi égale au rayon.

Démonstration pour les arcs, depuis 180°(200°) *jusqu'à* 270° (300°).

(Fig. 14.) Par la construction et d'après ce qui a été dit (9), le point E étant un des points de la courbe, et l'arc AS étant le tiers de l'arc quelconque, depuis 180° (200°) jusqu'à 270° (300°), $ASFC$; si, comme pour la figure précédente, l'on divise les deux tiers SFC de cet arc en deux parties égales au point F, si l'on tire la corde SF, ainsi que les lignes SK et FK parallèles aux côtés CO et AO du triangle rectangle AOC, et si l'on mène l'ordonnée EG, il est évident, par les mêmes raisons déduites dans la première partie de la démonstration, que les triangles AOC, FKS et AGE sont toujours semblables; que les deux derniers sont constamment égaux; que SK est la différence entre les sinus du tiers et des deux tiers de l'arc $ASFC$; que FK est la différence entre les sinus-verse du tiers et des deux tiers du même arc, et conséquemment que, pour l'arc quelconque, depuis 180° (200°) jusqu'à 270° (300°), $ASFC$, l'ordonnée homologue EG est

toujours égale à *SK*, différence entre les sinus du tiers et des deux tiers de l'arc, et l'abscisse homologue *AG* est aussi constamment égale à *FK*, différence entre les sinus-verse du tiers et des deux tiers du même arc.

L'on observera (fig. 12), pour l'arc de 270° (300°) *AKFRO*, que les différences entre les sinus du tiers et des deux tiers de l'arc, et entre les sinus-verse du tiers et des deux tiers du même arc, sont nécessairement égales au rayon et égales entr'elles, et qu'ainsi l'ordonnée *OB* égale son abscisse *AB* : cela est évident.

Valeur relative des ordonnées et des abscisses homologues aux arcs, depuis 270° (300°) *jusqu'à* 360° (400°).

SIXIÈME PROPOSITION.

16. L'ordonnée homologue est égale au sinus du tiers de l'arc plus le sinus du supplément à 360° (400°) des deux tiers de l'arc, et son abscisse est égale à la différence entre le sinus-verse du tiers de l'arc et le sinus-verse du supplément à 360° (400°) des deux tiers du même arc.

Démonstration. (Fig. 15.) Par la construction et d'après ce qui a été dit (9), l'arc *AS* étant le tiers de l'arc quelconque *ASFC*, depuis 270° (300°) jusqu'à 360° (400°), et le point *E* étant un des points de la courbe ; si l'on divise en deux parties égales,

an point F, les deux tiers SFC de l'arc $ASFC$, que l'on mène la corde FS, que par les points F et S l'on tire, parallèlement aux côtés AO et OC du triangle rectangle AOC, les lignes FK et SK, et que l'on trace l'ordonnée EG, il est évident, comme dans la démonstration précédente, que les triangles AOC, FKS et AGE sont semblables, et que les deux derniers sont constamment égaux; que SK égale le sinus SL, de l'arc AS, plus le sinus $FI (= LK)$ du supplément à 360° (400°) des deux tiers ASF de l'arc $ASFC$, et que $FK (= LI)$ égale la différence entre le sinus-verse AL, de l'arc AS, et le sinus-verse AI du supplément à 360° (400°) des deux tiers ASF de l'arc $ASFC$; mais comme SK égale l'ordonnée EG, de même que FK égale l'abscisse AG, à cause de l'égalité des triangles SKF et AGE : donc, etc.

L'on remarquera pour l'arc de 360° (400°) ou la circonférence de cercle (fig. 10), 1°. que l'ordonnée homologue AA étant égale (9) à la corde du tiers de l'arc, il est évident que le sinus NO du tiers de l'arc, plus le sinus BO du supplément à 360° (400°) des deux tiers de l'arc, égale aussi la corde du tiers de l'arc; 2°. que l'abscisse étant zéro, la différence entre le sinus-verse AO du tiers de l'arc, et le sinus-verse AO du supplément à 360° (400°) des deux tiers de l'arc, est aussi zéro.

Valeur relative des hypoténuses des triangles rectangles formés des ordonnées à la courbe et de leurs abscisses.

SEPTIÈME PROPOSITION.

17. Les hypoténuses des triangles rectangles formés des ordonnées à la courbe et de leurs abscisses, sont égales aux cordes des arcs, depuis le plus petit jusqu'à celui de 120° (133°,33 etc.) exclusivement.

Démonstration. (Fig. 12.) Si l'on considère une ordonnée quelconque et son abscisse à la courbe trisectrice *AIEC*, il est évident qu'elles forment les deux côtés d'un triangle rectangle, dont l'hypoténuse est une ligne tirée du point d'origine *A* de la courbe vers le sommet de l'ordonnée.

L'on a vu (10) que les lignes tirées du point d'origine *A* de la courbe vers tous ses autres points, étaient égales aux cordes du tiers de tous les arcs, depuis le plus petit jusqu'au plus grand; donc les hypoténuses des triangles rectangles formés des ordonnées à la courbe trisectrice et de leurs abscisses, sont égales aux cordes de tous les arcs, depuis le plus petit jusqu'à celui de 120° (135°,33 etc.) exclusivement.

L'on dit exclusivement, parce que la plus grande ordonnée *CA* n'ayant point d'abscisse, il n'existe pas de triangle rectangle, et conséquemment point d'hypoténuse; mais cette ordonnée *CA* tirée de

l'extrémité C de la courbe au point d'origine A, est égale (9) à la corde de 120° (133°,33 etc.)

D'où il résulte qu'une ligne tirée du point d'origine A de la courbe vers un quelconque de ses autres points, a toujours sa correspondante égale parmi les cordes des arcs, depuis le plus petit jusques et inclus celui de 120° (133°,33 etc.), et *vice versâ*.

CHAPITRE IV.

Nouvelle proportion géométrique continue.

HUITIÈME PROPOSITION.

18. L'abscisse homologue, ou bien la différence entre les sinus-verse du tiers et des deux tiers d'un arc quelconque au-dessous de 180° (200°), est moyenne proportionnelle entre le sinus-verse du tiers de l'arc et le sinus-verse de l'arc ; c'est-à-dire, (fig. 13) $\div\!\div AL : AG\ (=SK, 15) : AO$.

Démonstration. (Fig. 16). Par la construction, l'arc quelconque ASC au-dessous de 180° (200°), étant triple de l'arc AS, et le point E sur la corde AC étant un des points de la courbe, il en résulte que AE (8) égale la corde AS du tiers de l'arc, et que sur la ligne BP la partie PE égale celle BS, égale le rayon AB.

Par la construction, les demi-circonférences XPB et AFR étant égales, et leurs centres A et B, placés sur la même ligne RX, étant éloignés l'un de l'autre de la longueur du rayon AB, il est évident que la distance comprise entre tous leurs points homologues correspondans, à partir de X

et de A, est égale au rayon $AB\,(=AX)$; d'où il suit que si par le point P, sur la demi-circonférence XPB, l'on mène une parallèle à XR jusqu'à la rencontre en F de l'autre demi-circonférence, la distance PF égale le rayon AB, et les deux arcs XP et ASF sont égaux.

L'arc XP est double de l'arc AS, à cause de l'égalité de l'angle au centre ABS avec l'angle à la circonférence XBP: donc l'arc ASF est double de l'arc AS; mais l'arc AS est le tiers de celui ASC: donc les arcs AS, SF et FC sont égaux.

Si du point P, comme centre, avec la longueur $AP\,(=AB=PE=PF)$ pour rayon, l'on décrit, à partir du point A, un arc de cercle jusqu'à la rencontre en H de la corde AS prolongée, cet arc passe évidemment par les points E et F; les arcs AEF et ASF sont égaux, à cause de l'égalité de leur rayon et de leur corde AF; et puisque la corde AE égale celle AS, il suit que les arcs AE, EF, AS, SF et FC sont égaux.

L'angle à la circonférence $CAS\,(=HAE)$ a pour mesure indifféremment, soit la moitié de l'arc SFC, soit la moitié de l'arc EFH; donc ces deux arcs sont égaux: mais l'arc AE égale celui AS; donc les arcs $ASFC$ et $AEFH$ sont égaux, donc leurs cordes AC et AH sont égales.

Les arcs ASF et AEF sont égaux; donc l'arc FH égale celui FC, égale celui EF; donc l'arc EFH est divisé en deux parties égales au point F; donc si l'on mène la corde HE de cet arc, elle est per-

pendiculaire sur le rayon PF, et conséquemment sur sa parallèle le rayon AB; donc la corde HE prolongée se confond avec l'ordonnée EG.

Si l'on considère maintenant les triangles semblables, par la construction, ALS, AGH d'une part, et AGE, AOC d'autre part, on a pour les deux premiers la proportion $AL : AG :: AS : AH$, et pour les deux autres, on a celle $AG : AO :: AE : AC$; mais par la construction $AS : AH :: AE : AC$: donc $AL : AG :: AG : AO$. Donc, etc.

On observera (fig. 17) pour l'arc de 180° (200°), 1°. que la corde AS du tiers de cet arc, étant égale au rayon, forme avec AB et BS le triangle équilatéral ASB, du sommet duquel, S, abaissant la perpendiculaire SL, on a le rayon AB divisé en deux parties égales au point L; ensorte que le sinus-verse AL du tiers de l'arc égale la moitié du rayon; 2°. que la différence LK, entre les sinus-verse du tiers et des deux tiers de l'arc, égale évidemment la corde SF de l'arc de 60° (66°,66 etc.) ($= AB$), laquelle est parallèle au diamètre AC, à cause de l'égalité des arcs AS et FC; 3°. enfin que le diamètre AC pouvant être considéré comme le sinus-verse de l'arc de 180° (200°), la proportion continue $\div AL : LK (= AB) : AC$ subsiste toujours, car $\div 1 : 2 : 4$.

Suite de la proportion géométrique continue.

NEUVIÈME PROPOSITION.

19. L'abscisse homologue, ou bien la différence entre les sinus-verse du tiers et des deux tiers d'un arc quelconque, depuis 180° (200°) jusqu'à 270° (300°), est moyenne proportionnelle entre le sinus-verse du tiers de l'arc, et le sinus verse du supplément à 360° (400°) de l'arc; c'est-à-dire (fig. 14), $\div AL : AG (= KF, 15) : AO$.

Démonstration. (Fig. 18). Par la construction, l'arc AS étant le tiers de l'arc quelconque $ASRC$, entre 180° (200°) et 270 (300°), et le point E sur la corde AC étant un des points de la courbe, il est évident, 1°. que la ligne AE égale la corde AS (9); que sur la ligne ES la partie PE égale celle BS (= rayon AB, 7);

2°. Que l'arc XNP est double de l'arc AS, à cause de l'égalité de l'angle à la circonférence XBP avec l'angle au centre ABS;

3°. Que si par le point P, sur la demi-circonférence XNB, l'on mène une parallèle au diamètre AR jusqu'à la rencontre en F de l'autre demi-circonférence ASR, cette ligne PF égale le rayon AB (18), et les arcs ASF et XNP sont égaux; conséquemment l'arc AS égale celui SF, égale celui FC;

4°. Que (18) si par le point P, comme centre,

avec PA pour rayon, ($= AB = PE = PF$), l'on décrit, à partir du point A, un arc de cercle jusqu'à la rencontre en H de la corde AS prolongée, cet arc $AEFH$ passe par les points E et F, est égal à l'arc $ASFC$, et se trouve divisé, comme lui, en trois parties égales AE, EF et FH; que les cordes AC et AH sont égales; que la corde EH de l'arc EFH est perpendiculaire sur le rayon PF, ainsi que sur le diamètre AR, et qu'elle se confond avec l'ordonnée EG;

5°. Que les triangles semblables ALS, AGH d'une part, et AGE, AOC d'autre part, fournissent les proportions $AL : AG :: AS : AH$, et $AG : AO :: AE : AC$; d'où, à cause de l'égalité du rapport, par la construction, entre les deux derniers termes de chaque proportion, l'on conclut que $\div AL : AG : AO$. Donc, etc.

On remarquera (fig. 12), pour l'arc de 270° (300°) $AKFRO$, que le sinus-verse AB du tiers de l'arc, la différence BR entre les sinus-verse du tiers et des deux tiers de l'arc, et le sinus-verse AB du supplément à 360° (400°) de l'arc, sont trois termes égaux, et que la proportion continue subsiste toujours.

Suite de la proportion géométrique continue.

DIXIÈME PROPOSITION.

20. L'abscisse homologue, ou bien la différence du sinus-verse du tiers d'un arc quelconque, depuis

270° (300°) jusqu'à 360° (400°), avec le sinus-verse du supplément à 360° (400°) des deux tiers de l'arc, est moyenne proportionnelle entre le sinus-verse du supplément à 360° (400°) de l'arc, et le sinus-verse du tiers de l'arc; c'est-à-dire (fig. 15) $\div AO : AG (= LI, 16) : AL$.

Démonstration. (Fig. 19.) Par la construction, l'arc AS étant le tiers de l'arc quelconque $ASRC$ entre 270° (300°) et 360° (400°), et le point E sur le prolongement de la corde AC étant un des points de la courbe, il est évident, 1°. que la ligne AE égale la corde AS (9), que sur la ligne ES la partie PE égale celle BS (= rayon AB, 7);

2°. Que l'arc $XNBP$ est double de l'arc AS, à cause de l'égalité des angles XBS et ABS;

3°. Que si, par le point P sur la circonférence de cercle $XNBPV$, l'on mène une parallèle au diamètre AR jusqu'à la rencontre en F de l'autre circonférence $ASFC$, cette ligne PF égale le rayon AB (18), et les arcs ASF et XNP sont égaux; conséquemment l'arc AS égale celui SF, égale celui FC;

4°. Que (18) si, par le point P, comme centre, avec PA pour rayon ($= AB = PE = PF$), l'on décrit, à partir du point A, un arc de cercle jusqu'à la rencontre en H de la corde AS, cet arc $AEFH$ passe par les points E et F, est égal à l'arc $ASFC$, et se trouve divisé, comme lui, en trois parties égales AE, EF, FH; que les cordes AC, AH sont égales; que la corde EH de l'arc EFH

est perpendiculaire sur le rayon PF prolongé, conséquemment sur le diamètre AR, et qu'elle se confond avec l'ordonnée EG;

5°. Que les triangles semblables AOC, AGE d'une part, et AGH, ALS d'autre part, fournissent les proportions $AO : AG :: AC : AE$, et $AG : AL :: AH : AS$; d'où, à cause de l'égalité de rapport, par la construction, entre les deux derniers termes de chaque proportion, l'on conclut que $\fallingdotseq AO : AG : AL$; donc, etc.

L'on observera, à l'égard de l'arc de 360° (400ᵍ) ou la circonférence de cercle (fig. 10), que la différence du sinus-verse AO de l'arc de 120° (133°,33 etc.) qui est le tiers de 360° (400°), avec le sinus-verse AO du supplément à 360°(400°) de l'arc de 240° (266°,66 etc.) (deux tiers de 360°) (400°), étant zéro, et l'arc de 360° (400°) n'ayant plus de supplément, et conséquemment point de sinus-verse, la proportion continue cesse d'avoir lieu, puisque des trois termes qui la composaient, il n'en subsiste plus qu'un seul, qui est le sinus-verse du tiers de la circonférence de cercle.

21. De ce qui a été dit sur la valeur relative des ordonnées et des abscisses à la courbe trisectrice, sur les proportions (14) (fig. 12) que fournissent les triangles semblables AVT, AGF, et ASP, ANM, et enfin sur la nouvelle proportion géométrique continue, l'on peut déduire évidemment plusieurs moyens de vérification pour s'assurer de l'exactitude du calcul des tables des sinus.

TROISIÈME PARTIE.

CHAPITRE V.

Nouveau point de vue, sous lequel on peut considérer le moyen d'obtenir le tiers d'un arc jusqu'à 180° (200°) : *formation d'une courbe à cet effet, qui fait suite à la courbe trisectrice, qui la complète, et qui se décrit aussi d'un mouvement continu.*

Nouveau moyen pour obtenir le tiers d'un arc jusqu'a 180° (200°).

L'EXAMEN des ordonnées et de leurs abscisses à la première portion de la courbe trisectrice, ayant procuré des constructions géométriques, qui conduisent à considérer, sous un autre point de vue, le moyen de diviser un arc quelconque de 180° (200°) et au-dessous en trois parties égales, l'on va résoudre ce problème, en faisant usage d'une courbe que l'on décrit aussi d'un mouvement continu.

22. L'on a démontré (15, fig. 13), pour un arc quelconque jusqu'à 180° (200°), que le triangle *SKF* formé par la corde *SF* du tiers de l'arc, par la différence *SK* entre le sinus-verse du tiers et des deux tiers de l'arc, et par la différence *KF* entre le sinus du tiers et des deux tiers du même arc, était toujours semblable au grand triangle *AOC*, formé par la corde *AC* de l'arc, par son sinus-verse *AO*, et par son sinus *CO*.

Puisque ces deux triangles sont toujours semblables, l'on peut donc considérer le grand triangle *AOC*, comme étant, par rapport à un autre arc semblable à celui *ASC*, ce qu'est le petit triangle *SKF*, par rapport à l'arc *ASC*; c'est-à-dire, que l'on peut regarder la corde *AC* de l'arc *ASC*, comme étant la corde du tiers du nouvel arc semblable. Il est bien évident alors que si l'on pouvait déterminer la longueur du rayon de ce nouvel arc, on obtiendrait de suite le tiers de l'arc quelconque *ASC* jusqu'à 180° (200°), puisque les arcs semblables sont divisibles dans la même proportion.

ONZIÈME PROPOSITION.

Un arc quelconque, depuis le plus petit jusqu'à celui de 180° (200°), *étant donné, déterminer la longueur du rayon d'un nouvel arc semblable, dont le tiers aurait pour corde celle de l'arc donné.*

23. (Fig. 20.) Divisez l'arc donné quelconque *ADC*, en deux parties égales au point *D*; par le

point D et le centre B, tirez une ligne indéfinie $DBER$; sur l'arc DC, prenez DN qui en soit le tiers et portez-le du point E en I; par les points C et I, tirez une ligne qui rencontre au point F la ligne indéfinie $DBER$, laquelle n'est autre chose que le diamètre DE prolongé.

Il suit de cette construction, que sur la ligne CF la partie IF égale le rayon AB (Élem. de Géom.).

Du point F, comme centre, avec FC ou FA pour rayon, décrivez un arc de cercle indéfini $VCAS$; portez sur cet arc la longueur de la corde AC, de C en G et de A en K, vous aurez alors l'arc $GCAK$ divisé en trois parties égales, et semblable à l'arc ADC.

Démonstration. Sur l'arc $GCAK$, la partie CPA en est le tiers; sur l'arc ADC, la partie CN en est aussi le tiers : il suffira donc de prouver que l'arc CPA est semblable à l'arc CN.

Si, par le point A et le point F, l'on mène le rayon AF, il est évident, par la construction, que la partie FO de ce rayon égale FI (à cause des arcs égaux CD et DA), égale le rayon AB ou OB; d'où il suit que l'arc EO égale celui EI, égale celui DN; conséquemment le rayon OB prolongé passe par le point N; et comme, par la construction, l'arc NC égale deux fois l'arc DN, ou bien égale l'arc IE plus celui EO; alors la ligne ON est nécessairement parallèle à celle CI ou CF.

Par la construction, l'arc NC est le tiers de celui

ADC, puisqu'il est les deux tiers de sa moitié *DC*; donc l'arc *AN* est double de celui *NC* : mais la moitié de l'arc *AN* sert de mesure à l'angle à la circonférence *AON*; donc cet angle est égal à celui au centre *NBC* : mais, à cause des parallèles *ON* et *CF*, l'angle *AON* égale celui *AFC*; donc ce dernier angle égale celui *NBC*.

Les angles *AFC* et *NBC* étant égaux, il est évident que les arcs *CPA* et *CN*, qui leur servent de mesure, sont semblables; donc l'arc *GCAK*, triple de *CPA*, est semblable à l'arc *ADC*, triple de *NC*. Donc le rayon *CF* est celui d'un arc, semblable à l'arc donné *ADC*, et dont le tiers a pour corde celle de ce dernier.

Le centre des deux arcs semblables *CDA* et *GPK* étant situé, par la construction, sur la même ligne *DBF* qui les divise en deux parties égales, il suit que les rayons *BA* et *BC* sont parallèles aux rayons *FK* et *FG*; et le rayon *FC* déterminant l'arc *GC* pour le tiers de l'arc *GPK*, il est évident que si par le centre *B* l'on mène *BN* parallèlement à *FC*, l'on aura l'arc *CN* pour le tiers de celui *CDA*.

Un arc quelconque, depuis le plus petit jusqu'à celui de 180° (200°), étant évidemment susceptible de la même opération dans l'hypothèse de la trisection de la moitié de cet arc, l'on doit conclure que l'on peut, jusqu'à 180° (200°), déterminer le rayon d'un nouvel arc semblable à un autre arc donné, dont la corde soit celle du tiers du nouvel arc.

Au moyen de la courbe trisectrice, dont on a donné la description, l'on peut bien avoir le tiers de la moitié d'un arc quelconque jusqu'à 180°(200°), et conséquemment le rayon du nouvel arc semblable, en opérant comme on vient de le faire pour obtenir le point F; mais comme ce serait faire une double opération, puisque le but que l'on se propose n'est que la trisection d'un arc, il a donc fallu chercher un moyen direct, pour déterminer le point F sur le prolongement du diamètre DE : or ce moyen consiste, dans l'emploi d'une courbe que l'on décrit d'un mouvement continu avec la plus grande précision, et qui sert en même temps, et à déterminer la longueur du rayon dont il s'agit, et à résoudre le problème de la trisection, selon la méthode indiquée dans les Élémens de Géométrie; solution que l'on n'obtenait que par le tâtonnement.

FORMATION DE LA COURBE.

24. L'on a vu (fig. 10) comment, par le mouvement du diamètre BAX, on opérait le tracé de la courbe trisectrice : si l'on conçoit maintenant que l'extrémité X de ce diamètre, qui dans son mouvement circulaire a parcouru 240° (266°,66 etc.), continue (fig. 21) à se mouvoir circulairement pour compléter 360° (400°), de manière que le diamètre mobile BAX prolongé passe toujours par le point B du même diamètre fixe et arrive à la position MNX, il est évident que, pendant ce mouvement, le point A, milieu du diamètre mobile,

décrit une courbe de telle manière que, si de l'extrémité *B* du diamètre fixe on tire une ligne quelconque qui coupe cette courbe, la partie de cette ligne, comprise entre le point de section sur la courbe et le point de section sur le tiers de circonférence *XSX*, est toujours égale au rayon *AX* ou *AB*.

25. (Fig. 21.) Si l'on conçoit que le diamètre *OAC*, perpendiculaire sur celui *BAX*, tourne sur le point *A* comme pivot pour prendre la position *BAX*, il est évident que le rayon *AO*, pendant ce mouvement, détermine sur l'arc *OEB* de 90° (100°), tous les angles possibles depuis l'angle droit jusqu'au plus petit, et que, de son côté, le rayon *AC* prolongé parcourt dans le même temps tous les points de la courbe.

Soit donc l'angle *EAB*, d'une grandeur quelconque, entre zéro et 90° (100°); si l'on prolonge son côté *EA* jusqu'à la rencontre en *V* de la courbe, et si par l'extrémité *B*, de l'arc *EIB* qui sert de mesure à cet angle, l'on mène la ligne *BV*, il suit (24) que la partie *CV* de cette ligne, comprise entre le point de section *V* sur la courbe et le point de section *C* sur le tiers de circonférence *XSX*, est égale au rayon; conséquemment (Élém. de Géom.) que l'arc *DC* est égal au tiers de l'arc *EIB*. Donc, au moyen de la courbe, dont on vient de faire voir la formation, l'on peut obtenir le tiers d'un arc ou d'un angle quelconque de 90° (100°) et au-dessous.

Si l'on veut avoir la longueur du rayon d'un arc, semblable à celui quelconque *EIB* de 90° (100°) et au-dessous, et dont la corde du tiers soit égale à

celle de l'arc EIB, il faut diviser cet arc en deux parties égales au point I, et mener ensuite une ligne par le point I et le centre A, jusqu'à la rencontre en P de la courbe; alors la ligne tirée du point P vers l'extrémité B de l'arc, sera le rayon que l'on cherche ; cela est évident d'après ce qui a été dit (23). L'on voit qu'il en est de même pour l'arc quelconque de 90° (100°) à 180°(200°), BEF; par le point E, milieu de l'arc, et par le centre A, l'on mène une ligne jusqu'à la rencontre en V de la courbe, et la longueur VB est le rayon d'un arc semblable, dont la corde du tiers est égale à celle de l'arc BEF.

26. La courbe dont on vient de démontrer la formation, servant à obtenir directement la longueur du rayon d'un arc, semblable à un autre quelconque de 180° (200°) et au-dessous, et dont le tiers aurait pour corde celle de l'arc quelconque, cette courbe fournissant en même temps le moyen de déterminer, par une seule opération, le tiers d'un arc quelconque de 90° (100°) et au-dessous, il reste à faire voir comment elle se décrit d'un mouvement continu avec la plus grande précision, procure la plus grande justesse pour la trisection de l'arc, et offre, pour la construction de l'instrument propre à la décrire, plus de facilité que n'en présentait la construction de celui que l'on a employé pour le tracé de la première portion de la courbe trisectrice.

Description de la Courbe par un mouvement continu.

27. (Fig. 21.) Si l'on conçoit que le diamètre fixe BAX soit prolongé de la longueur XN égale au rayon AX, et que la longueur totale NB, par un mouvement inverse au premier, glisse sur le point B, tandis que le point X décrira le tiers de circonférence XSX, il est évident que le point N tracera la courbe, car la partie NX est toujours égale au rayon AX, et que la ligne NB viendra prendre la position $AXBT$.

L'on voit donc que cette courbe $NPVA$, dont le tracé s'opère en même temps et par le même mouvement qui produit le tiers de circonférence XSX, est décrite avec la précision la plus rigoureuse, et que, pour l'opération de la trisection, elle présente une coupe très-nette avec une ligne quelconque tirée du centre A. Si l'on se rappelle le mode de construction que l'on a employé pour l'instrument propre à décrire la première portion de la courbe trisectrice, l'on voit aussi que ce mode doit être le même pour le nouvel instrument, avec cette différence, que la règle mobile aura la longueur d'un rayon de plus, à l'extrémité N duquel sera le stilet, au lieu d'être au point A, et que l'on est dispensé d'évider le cylindre au point B, ce qui, dans la construction du premier instrument, était la partie la plus difficile à exécuter.

Il résulte de la grande précision et de la facilité

avec laquelle on peut décrire cette courbe, qu'elle est la plus convenable à employer pour la trisection de l'angle.

28. Dans son mouvement circulaire (fig. 10), l'extrémité X du diamètre BAX ayant décrit un arc de 120° (133°,33 etc.), le point A de ce diamètre a tracé la première portion de la courbe trisectrice : la continuation du mouvement circulaire de cette extrémité X jusqu'à 240°(266°,66 etc.), a fait décrire au point A du même diamètre la seconde portion de cette courbe. L'on a vu (24) (fig. 21) que le point A du diamètre décrivait encore une courbe, pendant que l'extrémité X terminait son mouvement circulaire à 360° (400°); l'on doit donc conclure que cette dernière courbe n'est qu'une suite, et fait la troisième partie de la courbe trisectrice, dont elle termine la révolution, puisque le diamètre BAX a complété son mouvement, en prenant la position MNX.

29. De ce qui a été dit (25) sur la manière d'obtenir le tiers d'un arc quelconque de 90° (100°) et au-dessous, l'on déduit le moyen geométrique de prendre directement le quart d'un arc quelconque jusqu'à 120° (133°,33 etc.), sans avoir recours aux triangles ni à la division des cordes.

(Fig. 22.) Soit l'arc XGM de 120° (133°,33 etc.); si l'on veut avoir le quart d une portion quelconque XG de cet arc, il faut, 1° mener par les extrémités G et B, de l'arc XG et du diamètre BX, une ligne indéfinie; 2° porter la longueur du rayon AB sur cette ligne, de G en E; 3° tirer par le point E et le centre A la ligne EAD : il est évident alors que l'arc IG

est le quart de l'arc *XG*, puisque, par la construction, l'arc *IG* est toujours le tiers de l'arc *BD* ou de son égal *XI*.

L'on voit en même temps que sur l'arc de 60° (66°,66 etc.) *ALM*, on a *AL* pour moitié de l'arc *XG*, et que sur l'arc *BDO* de 90° (100°), l'on a *BD* pour les trois quarts du même arc *XG*. L'on peut donc, par une seule opération bien simple, obtenir le quart, la moitié et les trois quarts d'un arc quelconque jusqu'à 120° (133°,33 etc.).

CHAPITRE VI.

Examen des abscisses et des ordonnées à la troisième portion de la courbe trisectrice; leur valeur relative, ainsi que celle des hypoténuses des triangles rectangles formés soit des ordonnées et de leurs abscisses, soit des ordonnées et de leurs abscisses augmentées *de la longueur du rayon.*

Examen des abscisses et des ordonnées à la troisième portion de la courbe trisectrice.

30. (Fig. 22.) Soit la courbe *KEN* formant la troisième portion de la courbe trisectrice : l'on peut considérer la ligne *AK* comme l'axe des abscisses; et si l'on prolonge *AN* jusqu'à la rencontre en *V* de la ligne *CV*, menée parallèlement à *AK* par le point de la courbe le plus élevé au-dessus de *AK*, la ligne *AV* sera l'axe des ordonnées. Ainsi, par exemple, les lignes *EF* et *AF* sont l'ordonnée et son abscisse, homologues à l'arc *BD* ou à son égal *XI*, *et vice versâ*, parce que le sommet *E* de l'ordonnée *EF* est toujours déterminé sur la courbe par le prolongement du rayon *AD*, qui établit la

grandeur de l'arc quelconque *BD* entre zéro et 90° (100°).

31. (Fig. 22.) Pour un arc quelconque *BD* entre zéro et 90° (100°), le triangle rectangle *AQD*, formé par son sinus *DQ*, son cosinus *AQ* et le rayon *AD*, étant par la construction toujours semblable au triangle rectangle *AFE*, formé par l'ordonnée homologue *EF*, son abscisse *AF* et par la ligne *AE* (qui n'est que le prolongement du rayon *DA* jusqu'à la rencontre de la courbe), et ces deux triangles ayant toujours nécessairement lieu, il est évident que les sinus et les cosinus des arcs jusqu'à 90° (100°), sont entre eux comme les ordonnées homologues et leurs abscisses.

32. Si l'on considère les arcs *AL* et *XIG* formant toujours, par la construction, les deux tiers et le double des deux tiers d'un arc quelconque *BD* jusqu'à 90° (100°), et que l'on examine les triangles semblables *BRL*, *BHG* et *BFE*, qui en sont toujours une suite, l'on voit que le sinus et le cosinus des deux tiers *AL* de l'arc quelconque *BD*, sont entre eux comme le sinus et le sinus-verse du supplément *GMB* du double des deux tiers *XIG*, et comme l'ordonnée homologue et son *abscisse augmentée* de la longueur du rayon.

Valeur relative des ordonnées à la troisième portion de la courbe trisectrice.

DOUZIÈME PROPOSITION.

33. Pour tous les arcs jusques et inclus celui de 90° (100°), l'ordonnée homologue est égale au sinus des deux tiers de l'arc, plus le sinus du double des deux tiers.

Démonstration. (Fig. 22.) Sur une ligne quelconque BE, tirée de l'extrémité B du diamètre BX vers la courbe $KEPN$, la partie GE de cette ligne, comprise entre la courbe et l'arc de 120° (133°,33 etc.) $XGYM$, étant toujours égale au rayon AB, et les arcs ALM de 60° (66°,66 etc.) et $XGYM$ de 120° (133°33 etc.) étant coupés par cette ligne, de manière que l'arc XIG est double de celui AL, qui est toujours les deux tiers de l'arc BD homologue à l'ordonnée quelconque EF; si par les points de section L et G, opérés sur les deux arcs par la ligne BE, l'on mène les deux sinus LR et GH, et que par le point G l'on tire vers l'ordonnée la ligne GZ parallèle au diamètre BX, il est évident que l'ordonnée quelconque EF est toujours composée, 1°. de la partie EZ égale au sinus LR des deux tiers de l'arc homologue BD, à cause de l'égalité constante, par la construction, des triangles GZE et BLR; 2°. de la partie ZF égale, par la construction, au sinus GH du double des deux tiers de l'arc homologue BD. Donc, etc.

Cette vérité se démontre également par la proportion que fournissent les triangles semblables BLR et BGH; $BL:LR::BG:GH$, d'où l'on tire $BL:LR::BL+BG:LR+GH$; et comme dans le triangle BEF (toujours semblable à celui BLR par la construction) le côté BE (homologue à celui BL) égale toujours par la construction la somme des antécédens $BL+BG$, il suit que l'ordonnée ou côté EF (homologue à celui LR) égale toujours aussi la somme des conséquens $LR+GH$.

L'on remarquera, pour l'arc de 90° (100°), que le sinus MT des deux tiers de l'arc étant aussi le sinus du double des deux tiers $XGYM$, l'ordonnée homologue AN est égale à deux fois le sinus des deux tiers de l'arc: cela est évident, à cause de l'égalité, par la construction, des deux triangles rectangles BMT et MNa.

Valeur relative des abscisses à la troisième portion de la courbe trisectrice.

TREIZIÈME PROPOSITION.

34. Pour tous les arcs jusqu'à celui de $67°\frac{1}{2}$ (75°), l'abscisse homologue est égale au cosinus des deux tiers de l'arc, plus le cosinus du double des deux tiers.

Démonstration. (Fig. 22.) Par la construction de la courbe $KEPN$, les ordonnées étant parallèles à leur axe AV, qui est perpendiculaire sur l'axe

AK des abscisses, il est évident qu'une abscisse quelconque est égale à la longueur de la parallèle à son axe, qui est déterminée entre son ordonnée et le point de section opéré sur l'axe *AV*, par la ligne menée de l'extrémité *B* du diamètre *BX* vers le sommet de l'ordonnée.

Soit l'ordonnée *EF*, homologue à l'arc quelconque jusqu'à 67° ½ (75°) *BD*, qui a pour abscisse *AF*; si du point *U*, section de la ligne *BE* avec l'axe *AV*, l'on mène vers l'ordonnée la ligne *Um*, parallèlement à l'axe *AK* des abscisses, il est clair que cette parallèle *Um* est égale à l'abscisse *AF* : or cette parallèle se compose des deux parties *md* et *dU*, dont la première égale, par la construction, *GZ* = *BR* cosinus de l'arc *AL*, formant les deux tiers de l'arc *BD*, et la seconde égale évidemment le cosinus *AH* de l'arc *XIG*, formant le double des deux tiers de l'arc *BD*.

Tant que la partie *EU* de la ligne quelconque *BE* menée du point *B* vers la courbe, comprise entre la courbe et l'axe *AV* des ordonnées, est plus grande que le rayon, il est évident que la parallèle *Um*, et conséquemment l'abscisse, se compose toujours du cosinus des deux tiers de l'arc homologue, plus le cosinus du double des deux tiers; mais dès l'instant où cette partie devient égale au rayon, lorsque la ligne *BP*, tirée du point *B* vers la courbe, passe par le point de section *Y* de l'axe *AV* des ordonnées avec l'arc de cercle de 120° (133°,33 etc.) *XGYM*, il est clair alors que l'abscisse *AH*

($= Yb =$ cos. SB) ne se compose plus que du cosinus SB des deux tiers ALJ de l'arc homologue BDn, dont la valeur est de 67° ½ (75°), puisque cet arc plus son tiers Ye ($= On$) égale 90° (100°). Donc etc.

Suite de la valeur relative des abscisses à la troisième portion de la courbe trisectrice.

QUATORZIÈME PROPOSITION.

35. Pour les arcs entre 67° ½ (75°) et 90° (100°), l'abscisse homologue est égale au cosinus des deux tiers de l'arc, moins le sinus de l'arc formant la différence entre 90° (100°) et le double des deux tiers de l'arc.

Démonstration. (Fig. 23.) Soit l'arc quelconque BnD entre 67° ½ (75°) et 90° (100°), dont l'ordonnée et l'abscisse homologues sont EF et AF, et soit la ligne BE, menée de l'extrémité B du diamètre vers le sommet de l'ordonnée, coupant nécessairement l'arc de 120° (133°,33 etc.) $XGYM$, entre 90° (100°) et 120° (133°,33 etc.), il est évident que sur cette ligne BE, la partie IE, toujours égale au rayon et comprise entre la courbe et l'arc $XGYM$, fait une section au point b avec l'axe AV des ordonnées, et que la parallèle ba, menée du point de section b vers l'ordonnée, est égale à l'abscisse AF.

Si l'on considère maintenant les triangles égaux, par la construction, IUE et BRC dont les côtés

homologues sont parallèles, l'on voit que le côté IU égale son homologue BR cosinus de l'arc AC formant les deux tiers de l'arc quelconque BnD : or le côté IU se compose évidemment de deux parties, l'une $SU = ba$, égale l'abscisse AF, et l'autre IS égale le sinus de l'arc YI, formant la différence entre l'arc XGY de 90° (100°) et celui XGI double de l'arc AC : donc l'abscisse AF d'un arc homologue quelconque entre 67° ½ (75°) et 90° (100°), égale $IU - IS = BR - IS$, c'est-à-dire, égale le cosinus des deux tiers de l'arc homologue, moins le sinus de la différence entre 90° (100°) et le double des deux tiers.

L'on remarquera, pour l'arc de 90° (100°), que l'abscisse homologue est zéro, parce que le cosinus de l'arc de 60° (66°,66 etc.), qui forme les deux tiers de l'arc de 90° (100°), est égal au sinus de l'arc de 30° (33°,33 etc.), qui forme la différence entre l'arc de 90° (100°) et le double des deux tiers. Cela est en outre évident, puisque, dans ce cas, l'ordonnée NA, homologue à l'arc de 90° (100°) BDO, passe par le point d'origine A des abscisses.

Valeur relative de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, formé d'une ordonnée quelconque et de son abscisse à la troisième portion de la courbe trisectrice.

QUINZIÈME PROPOSITION.

36. L'hypoténuse d'un triangle rectangle, formé d'une ordonnée quelconque et de son abscisse à la

troisième portion de la courbe trisectrice, est égale à la corde du supplément des deux tiers de l'arc homologue à l'ordonnée.

Démonstration. L'on a vu (31, fig. 22) que le sinus *DQ* d'un arc quelconque *BD*, entre zéro et 90° (100°), son cosinus *AQ* et le rayon *AD*, donnaient un triangle rectangle toujours semblable à celui *AFE*, formé par l'ordonnée homologue *EF*, son abscisse *AF* et par la ligne *AE*, qui n'est que le prolongement, jusqu'à la courbe, de l'hypoténuse *DA* du premier triangle. Cela posé, par la construction (fig. 24), la partie *GE* de la ligne *BE* est égale au rayon *AB*, l'arc *GI* est le tiers de l'arc quelconque *BD* entre zéro et 90° (100°), et l'arc *AL* en est les deux tiers. Si par le centre *A* l'on mène le rayon *AT* parallèle à celui *BL*, l'arc *BT* égale celui *AL* et il est double de l'arc *GI*. Si par le point *X*, extrémité du diamètre *BX*, et le point *T*, on mène la corde *XT*, et que par le point *G* on mène le rayon *GA*, l'on a les triangles *XAT* et *AGE* qui sont isoscèles par la construction, et dont les deux côtés égaux, dans chaque triangle, sont égaux entre eux, puisqu'ils sont égaux au rayon. Ces deux triangles isoscèles ont en outre leurs angles égaux chacun à chacun; car l'angle à la base *AXT* du premier triangle, ayant pour mesure la moitié de l'arc *BT*, égale nécessairement l'angle à la base *GAE* du second triangle, qui a pour mesure l'arc *GI* moitié de l'arc *BT*; d'où il suit que ces deux triangles isoscèles sont égaux :

donc le côté AE égale le côté XT. La ligne XT est la corde de l'arc servant de supplément aux deux tiers de l'arc quelconque BD entre zéro et 90° (100°), la ligne AE est donc égale à cette corde; mais la ligne AE est l'hypoténuse du triangle rectangle AFE : donc l'hypoténuse AE du triangle rectangle AFE, formé de l'ordonnée et de son abscisse à la courbe KEN, est égale à la corde du supplément des deux tiers de l'arc quelconque BD, entre zéro et 90° (100°), homologue à l'ordonnée EF.

Ainsi, pour avoir la valeur relative d'une ligne tirée d'un point quelconque E de la courbe KEN au centre A, il faut prolonger cette ligne EA jusqu'à la rencontre en D de l'arc de 90° (100°) BDO; mener ensuite, par le point E et l'extrémité B du diamètre BX, la ligne EB, et enfin retrancher de l'arc BD, de D en T, son tiers GI; alors la corde XT du supplément aux deux tiers de l'arc homologue BD, est la valeur relative de la ligne quelconque AE.

37. (Fig. 24.) Une ligne quelconque EA, comprise entre la courbe KEN et le centre A (à l'exception des deux lignes extrêmes AK et AN), étant toujours l'hypoténuse du triangle rectangle formé de l'ordonnée EF et de son abscisse AF, sa valeur peut être déterminée par la racine carrée de la somme des carrés de l'ordonnée et de l'abscisse; et comme cette hypoténuse EA est égale à la corde XT du supplément aux deux tiers BT de l'arc homologue BD, si l'on mène le sinus Ta de l'arc BT,

l'on voit que (la corde XT étant moyenne proportionnelle entre XB et Xa, et le carré de cette corde étant égal à la somme des carrés du sinus Ta et du sinus-verse Xa du supplément aux deux tiers de l'arc homologue BD) l'hypoténuse EA est encore égale, soit à la racine carrée du produit du diamètre XB par le sinus-verse Xa du supplément aux deux tiers de l'arc homologue BD, soit à la racine carrée de la somme des carrés du sinus et du sinus-verse du supplément aux deux tiers de l'arc homologue; d'où il résulte que la somme des carrés de l'ordonnée et de son abscisse, est égale, soit au produit du diamètre par le sinus-verse du supplément aux deux tiers de l'arc homologue, soit à la somme des carrés du sinus et du sinus-verse du supplément aux deux tiers de l'arc homologue.

38. (Fig. 24). L'hypoténuse AE, du triangle rectangle AFE formé d'une ordonnée quelconque EF et de son abscisse AF homologues à un arc BD entre zéro et 90° (100°), n'étant évidemment autre chose, à l'exception des lignes extrêmes AN et AK, qu'une ligne tirée du centre A vers un point quelconque E de la troisième portion KEN de la courbe trisectrice, il suit que cette ligne quelconque AE (36) est égale à la corde du supplément des deux tiers de l'arc homologue BD entre zéro et 90° (100°); conséquemment que les lignes menées du centre A vers tous les points de la troisième portion de la courbe, les points N et K exceptés, sont égales aux cordes des supplémens des deux tiers de tous les

arcs homologues entre zéro et 90° (100°) ; mais comme les cordes de tous ces supplémens sont évidemment celles des arcs entre 120° (133°,33 etc.) et 180° (200°), et que les lignes extrêmes *AN* et *AK* sont égales, par la construction, aux cordes des arcs de 120° (133°,33 etc.) et 180° (200°), il en résulte nécessairement que les lignes menées du centre *A* vers tous les points possibles de la troisième portion *KEN* de la courbe, sont égales aux cordes de tous les arcs, depuis et inclus celui de 120° (133°,33 etc.) jusques et y compris celui de 180° (200°) ; c'est-à-dire, qu'une ligne menée du centre *A* vers un point quelconque de la troisième portion *KEN* de la courbe trisectrice, a toujours sa correspondante égale parmi les cordes des arcs de 120° (133°,33 etc.) à 180° (200°) inclusivement, *et vice versâ.*

39. De ce qui vient d'être démontré (36 et 38, fig. 24), il suit qu'une ligne *AE*, menée du centre *A* vers un point quelconque *E* de la troisième portion *KEN* de la courbe trisectrice, est égale à la corde d'un arc qui forme le tiers de la circonférence augmentée de deux fois le complément de l'arc homologue.

En effet, supposons que la ligne *XP* représente la ligne *AN*, qui, par la construction, est égale à la corde de l'arc de 120° (133°,33 etc.), alors l'arc *BP* égale nécessairement les deux tiers de l'arc *BPO* : puisque la ligne *XT* (36) égale la ligne quelconque *AE*, et que l'arc *BT* est égal aux deux

tiers de l'arc homologue BD, qui a pour complément l'arc DO, il est évident que l'arc PT égale les deux tiers de l'arc DO; mais le triple de l'arc PT est égal à deux fois l'arc DO; donc l'arc XOP plus l'arc PT, multipliés par trois, égalent la circonférence de cercle plus deux fois l'arc DO: mais la corde $XT (= AE)$ est celle de l'arc XOP plus l'arc PT; donc la ligne AE, menée du centre A vers un point quelconque E de la troisième portion KEN de la courbe trisectrice, est égale à la corde d'un arc qui forme le tiers de la circonférence augmentée de deux fois le complément de l'arc homologue.

40. (Fig. 24.) L'arc BD, homologue au point quelconque E de la troisième portion KEN de la courbe trisectrice, étant déterminé sur l'arc BPO de 90° (100°) par le prolongement de la ligne EA; si, du point B comme centre avec BA pour rayon, l'on décrit la demi-circonférence ACa, il est évident que le prolongement de la ligne EA coupe cette demi-circonférence en un point C, de manière que l'arc APC est toujours le double de l'arc DO complément de l'arc homologue BD; d'où il résulte (39) que la ligne quelconque EA est égale à la corde d'un arc, qui forme le tiers de la *circonférence augmentée* de la longueur de l'arc ayant pour corde le prolongement de EA.

Il suit de cette vérité, que, pour avoir le tiers d'un arc quelconque sur la demi-circonférence ACa, de l'arc APC, par exemple, il faut prolonger la corde

CA de cet arc jusqu'à la rencontre en *E* de la troisième portion *KEN* de la courbe trisectrice, et prendre ensuite la différence entre les deux arcs, dont l'un est soutenu par la corde *XP* de 120° (133°,33 etc.), et l'autre par la ligne *EA* considérée comme corde; cette différence sera égale au tiers de l'arc *APC*.

Valeur relative de l'hypoténuse du triangle rectangle formé d'une ordonnée quelconque à la troisième portion de la courbe, et de son abscisse augmentée *de la longueur du rayon.*

SEIZIÈME PROPOSITION.

41. L'hypoténuse du triangle rectangle, formé d'une ordonnée quelconque à la troisième portion de la courbe et de son *abscisse augmentée* de la longueur du rayon, est égale au rayon, plus la corde du supplément du double des deux tiers de l'arc homologue.

Démonstration. (Fig. 22.) D'après la formation de la troisième portion *KEN* de la courbe trisectrice, une ligne *BE*, menée de l'extrémité *B* du diamètre *BX* vers un point quelconque *E* de cette portion de courbe, étant toujours l'hypoténuse d'un triangle rectangle formé de l'ordonnée quelconque *EF* et de son abscisse *AF* homologues à l'arc *BD*, et cette ligne *BE* coupant toujours l'arc de 120°,

(133°,33 etc.) XGM, en un point G, de manière que la partie XG de cet arc est constamment égale au double des deux tiers de l'arc homologue BD, puisque (29) l'arc GI, tiers de celui BD, est le quart de l'arc XG, il est évident que des deux parties BG et GE qui composent la ligne quelconque BE, la première BG est toujours égale à la corde de l'arc GMB servant de supplément à l'arc XG double des deux tiers de l'arc homologue BD, et que la seconde partie GE, par la construction, est toujours égale au rayon AB : donc, etc.

42. Il suit de la proposition précédente, qu'un arc quelconque de 180° (200°) et au-dessous, dont la corde du tiers serait égale à la corde d'un autre arc donné semblable au premier, a toujours pour rayon une ligne égale au rayon de l'arc donné, plus la corde de l'arc servant de supplément au double des deux tiers de l'arc donné.

43. (Fig. 24.) Si l'on considère toutes les lignes tirées du point B vers la troisième portion KEN de la courbe trisectrice, et que de la valeur de ces lignes, calculée au moyen des ordonnées et de leurs abscisses, on en retranche celle du rayon, il est évident que l'on aura la valeur de toutes les cordes, depuis celle BM de l'arc de 60° (66°,66 etc.) exclusivement, jusqu'à celle BX de l'arc de 180° (200°) exclusivement.

44. (Fig. 24.) Si, dans les deux triangles rectangles AFE et BFE, l'on compare la valeur des deux hypoténuses AE et BE par la somme des

carrés des deux côtés adjacens à chaque angle droit, l'on voit, 1°. pour le triangle AFE, que la racine carrée de la somme des carrés de l'ordonnée et de son abscisse est égale (36) à la corde XT du supplément de l'arc BT; 2°. pour le triangle BFE, que la racine carrée de la somme des carrés de la même ordonnée et de son *abscisse augmentée* de la longueur du rayon, est égale (41) au rayon ($=GE$) plus la corde BG de l'arc servant de supplément à celui XG, qui est double de l'arc BT: d'où l'on conclut que la ligne AE, tirée du centre A vers un point quelconque E de la troisième portion de la courbe trisectrice, étant la corde du supplément d'un arc, la ligne BE, moins le rayon, menée de l'extrémité B du diamètre BX vers le même point E de la courbe, est la corde du supplément d'un arc double du premier.

Autre manière de considérer la valeur relative de l'hypoténuse du triangle rectangle, formé d'une ordonnée quelconque à la troisième portion de la courbe trisectrice et de son abscisse augmentée *de la longueur du rayon.*

45. (Fig. 24.) De la formation de la troisième portion KEN de la courbe trisectrice, il résulte évidemment, 1°. que les lignes BK et BN, menées de l'extrémité B du diamètre BX aux deux points extrêmes de cette portion de courbe, sont égales, l'une à trois fois la longueur du rayon AB, et l'autre à deux fois seulement la même longueur ;

2°. Que la longueur de chacune des autres lignes menées du même point B vers cette portion de la courbe, telle que BE, par exemple, se compose toujours de deux fois la lon-

gueur du rayon AB ($=BL=GE$), plus la partie LG comprise entre les deux arcs ALM et XGM ;

3°. Que cette partie LG est toujours l'hypoténuse du triangle rectangle LeG, formé, 1°. du côté Ge, différence entre le sinus LH (des deux tiers AL de l'arc homologue BD) et le sinus Gd (de l'arc XG double des deux tiers) ; 2°. du côté eL qui se compose du sinus-verse Lm ($=AH$) de l'arc AL, plus le cosinus me ($=Ad$) de l'arc XG ;

4°. Que, tant que l'hypoténuse LG du triangle rectangle LeG se trouve coupée par le rayon AY, le côté Le de ce triangle se compose toujours du sinus-verse AH ($=Lm$) des deux tiers de l'arc homologue, plus le cosinus Ad($=me$) du double des deux tiers ;

5°. Que l'hypoténuse LG cesse d'être coupée par le rayon AY, lorsque la ligne tirée du point B vers la courbe passe par l'extrémité Y de ce rayon, telle que la ligne Br, et qu'alors sa partie fY, comprise entre les deux arcs, est l'hypoténuse du triangle rectangle fhY, dont le côté Yh est bien toujours la différence entre les sinus fl et YA des deux tiers et du double des deux tiers de l'arc homologue, mais dont l'autre côté fh ($=lA$) n'est plus composé que du sinus-verse des deux tiers de l'arc homologue ;

6°. Que lorsque la ligne tirée du point B vers la courbe cesse de couper le rayon AY, et n'opère plus sa section avec l'arc XGM que sur sa partie YM de 30° (33°,33 etc.), telle que la ligne Bb, alors sa partie US, comprise entre les deux arcs, est l'hypoténuse du triangle rectangle SVU, dont le côté UV est toujours la différence entre les sinus Sk et Ui des deux tiers et du double des deux tiers de l'arc homologue, mais dont l'autre côté SV est égal à la différence entre le sinus-verse RA ($=Sn$) des deux tiers de l'arc homologue et le sinus UZ ($=Vn$) de l'arc UY, lequel forme la différence entre l'arc de 90° (100°) XGY et l'arc XGU double des deux tiers.

Ainsi une ligne quelconque tirée du point B vers la courbe, à l'exception des lignes extrêmes BK et BN, se compose

toujours de la longueur de deux rayons, plus de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont l'un des côtés, perpendiculaire au diamètre *BX*, est toujours égal à la différence entre le sinus des deux tiers de l'arc homologue et le sinus du double des deux tiers, mais dont l'autre côté, parallèle au même diamètre, se détermine de trois manières différentes, selon la position de la ligne menée du point *B* vers la courbe. La première manière est constante, tant que la ligne menée du point *B* vers la courbe, coupe sur l'arc *XGM* de 120° (133°,33 etc.) sa partie *XGY* de 90° (100°), et la valeur de ce côté est égale à la somme du sinus-verse des deux tiers de l'arc homologue et du cosinus du double des deux tiers; la seconde n'a lieu que dans le seul cas où la ligne menée du point *B* vers la courbe, passe par l'extrémité *Y* de l'arc *XGY* de 90° (100°), et la valeur de ce côté est égale au sinus-verse des deux tiers de l'arc homologue; la troisième est constante pour tous les cas où la ligne menée du point *B* vers la courbe, coupe sur l'arc *XGM* de 120° (133°,33 etc.) sa partie *YUM* de 30° (33°,33 etc.), et la valeur de ce côté est égale au sinus-verse des deux tiers de l'arc homologue, moins le sinus de l'arc formant la différence entre l'arc de 90° (100°) et le double des deux tiers.

46. Les hypoténuses, moins le rayon, des triangles rectangles formés des ordonnées à la troisième portion de la courbe trisectrice et de leurs *abscisses augmentées* de la longueur du rayon, étant égales (43, fig. 24.) aux cordes des arcs depuis celui de 60° (66°,66 etc.) jusqu'à celui de 180° (200°), l'on verra, dans le chapitre suivant, comment les lignes, moins le rayon, tirées du même point *B* vers le sommet des ordonnées à une partie de la deuxième portion de la courbe trisectrice, sont égales aux cordes des arcs, depuis le plus petit jusqu'à celui de 60° (66°,66 etc.).

CHAPITRE VII.

Examen d'une partie de la seconde portion de la courbe trisectrice; valeur relative des ordonnées et de leurs abscisses à cette partie de courbe, ainsi que celle des hypoténuses des triangles rectangles formés des ordonnées et de leurs abscisses.

Examen (fig. 25.) *de la partie* NSR *de la seconde portion de la courbe trisectrice.*

47. POUR les trois portions de la courbe trisectrice, on a considéré le point d'origine *A* de la courbe comme étant aussi celui des abscisses; mais dans l'examen de la partie *NSR* de la seconde portion de cette courbe, ce sera le point *B* que l'on prendra pour leur origine; ainsi la ligne *AN* sera l'axe des ordonnées, et le rayon *AB* sera celui des abscisses.

Si, de l'extrémité *B* du diamètre *BX*, l'on tire vers la partie *NSR* de la courbe une ligne quelconque *BS*, qui coupe aux points *P* et *H* la demi-circonférence *BYX* et l'arc *AMR* de 90° (100°);

si l'on mène l'ordonnée *SF*, et que par son sommet *S* et le centre *A* l'on tire la ligne *SE*; enfin, si par le point *P* l'on mène le sinus *PO* de l'arc *BP*, il est évident, par cette construction, 1°. que l'arc *XYP* est double de celui *AMH*; 2°. que l'ordonnée *SF* est homologue à l'arc *BDE*, dont le tiers est égal à l'arc *GP*, dont les deux tiers sont égaux à l'arc *AMH*, et dont le double des deux tiers est égal à l'arc *XYP*; 3°. que la ligne quelconque *BS*, l'ordonnée *SF* et son abscisse *BF* fournissent un triangle rectangle *BFS*, lequel est toujours semblable à celui *BOP* formé de la corde *BP*, du sinus *PO* et du sinus-verse *BO* de l'arc *BP*, qui sert de supplément à l'arc *XYP* double des deux tiers; d'où il résulte que la similitude des triangles rectangles *BFS* et *BOP* donne toujours le rapport suivant : les ordonnées et leurs abscisses à la partie *NSR* de la seconde portion de la courbe trisectrice, sont entr'elles comme les sinus et les sinus-verse des arcs servant de supplément au double des deux tiers des arcs homologues.

Valeur relative des ordonnées à la partie NSR *de la seconde portion de la courbe trisectrice.*

DIX-SEPTIÈME PROPOSITION.

48. (Fig. 25.) Une ordonnée quelconque à la partie *NSR* de la courbe trisectrice, est égale au sinus des deux tiers de l'arc homologue, plus le sinus de l'arc double des deux tiers.

Démonstration. L'ordonnée quelconque *SF* se compose évidemment des deux parties *FI* et *IS*, à cause des parallèles *HI* et *AB*; la partie *FI* est toujours égale, par la construction, au sinus *HL* de l'arc *AMH* formant les deux tiers de l'arc homologue *BDE*; la partie *IS* est aussi toujours égale au sinus *PO* de l'arc *XYP*, qui forme le double des deux tiers de l'arc homologue; car sur la ligne *BS* les deux parties *SP* et *BH* étant égales, puisque chacune d'elles est égale au rayon *AB* par la construction, il suit que *SH* égale *BP*, que les deux triangles rectangles *BOP* et *HIS* sont égaux, et conséquemment que *IS* égale *PO*: donc, etc.

On observera que l'ordonnée extrême *BR*, homologue, par la construction, à l'arc de 135° (150°) *BDV*, n'est composée que du sinus de l'arc *AMR* de 90° (100°) formant les deux tiers de l'arc homologue, parce que l'arc de 180° (200°), double des deux tiers, n'a pas de sinus.

Valeur relative des abscisses à la partie NSR *de la seconde portion de la courbe trisectrice.*

DIX-HUITIÈME PROPOSITION.

49. (Fig. 25.) L'abscisse d'une ordonnée quelconque à la partie *NSR* de la seconde portion de la courbe trisectrice, est égale au cosinus des deux tiers de l'arc homologue, plus le sinus-verse du supplément de l'arc double des deux tiers.

Démonstration. Il est évident, par la construction et d'après ce qui a été dit n° 48, que l'abscisse *BF* de l'ordonnée quelconque *SF* se compose toujours du cosinus *BL* de l'arc *AMH* formant les deux tiers de l'arc homologue *BDE*, plus le sinus-verse *BO* (=*HI*=*LF*) du supplément *BP* de l'arc *XYP* double des deux tiers : donc, etc.

Valeur relative des hypoténuses des triangles rectangles, formés des ordonnées et des abscisses à la partie NSR *de la seconde portion de la courbe trisectrice.*

DIX-NEUVIÈME PROPOSITION.

50. (Fig. 25.) L'hypoténuse d'un triangle rectangle, formé d'une ordonnée quelconque et de son abscisse à la partie *NSR* de la seconde portion

de la courbe trisectrice, est égale au rayon, plus la corde du supplément du double des deux tiers de l'arc hòmologue.

Démonstration. Une ligne menée de l'extrémité *B* du diamètre *BX* vers un point quelconque *S* de la partie *NSR* de la courbe, à l'exception de la ligne *BR* qui est égale au rayon, étant toujours l'hypoténuse du triangle rectangle formé de l'ordonnée quelconque *SF* et de son abscisse *BF*, il est évident que cette ligne est toujours égale au rayon *AB* (= *SP*), plus la corde *BP* du supplément de l'arc *XYP* double des deux tiers de l'arc homologue *BDE*, et cela, par les raisons données (41) pour une ligne menée du même point *B* vers la troisième portion *KN* de la courbe trisectrice : donc, etc.

51. La valeur relative des ordonnées et de leurs abscisses à la partie *NSR* de la seconde portion de la courbe trisectrice, étant connue, et la ligne *BS* tirée de l'extrémité *B* du diamètre *BX* vers un point quelconque de cette partie de courbe, le point *R* excepté, étant toujours l'hypoténuse d'un triangle rectangle *BFS* dont les deux autres côtés sont formés de l'ordonnée et de son abscisse, il est clair que l'on peut calculer la valeur de chacune de ces hypoténuses ; mais comme, en retranchant de leur valeur celle du rayon, il reste évidemment la valeur des cordes de tous les arcs, depuis le plus petit jusqu'à celui de 60° (66°,66 etc.) *BPM* exclusivement, il suit qu'au moyen des ordonnées et des

abscisses à cette partie de la courbe, l'on peut obtenir la valeur des cordes de tous les arcs, depuis le plus petit jusqu'à celui de 60° (66°,66 etc.) exclusivement.

L'on a vu (43) que l'on pouvait aussi déterminer de la même manière la valeur des cordes des arcs, depuis celui de 60° (66°,66 etc.) jusqu'à celui de 180° (200°); donc, à l'exception des cordes des arcs de 60° (66°,66 etc.) et de 180° (200°), qui sont toujours connues, l'on peut avoir la valeur des cordes de tous les arcs, depuis le plus petit jusqu'à celui de 180° (200°), en la calculant par celle des ordonnées et de leurs abscisses à la partie *KNR* de la courbe trisectrice.

52. Les lignes menées du point d'origine *A* de la courbe trisectrice vers tous ses autres points, sont égales (17 et 38) aux cordes de tous les arcs, depuis le plus petit jusqu'à celui de 180° (200°), et l'on peut obtenir la valeur de toutes ces lignes, en les considérant comme les hypoténuses des triangles rectangles formés des ordonnées et de leurs abscisses; on peut avoir également la valeur de celles menées (fig. 25) de l'extrémité *B* du diamètre *BX* vers tous les points de la partie *KNR* de la courbe trisectrice, et en retranchant de leur valeur celle du rayon, l'on obtient (51) la valeur de toutes les cordes, depuis la plus petite jusqu'à celle de 180° (200°): l'on peut donc déterminer de deux manières différentes la valeur des cordes de tous les arcs, depuis le plus petit jusqu'à celui de 180° (200°).

53. Il résulte de tout ce qui a été dit sur la nouvelle proportion géométrique continue, sur la valeur relative des ordonnées et des abscisses aux trois portions de la courbe trisectrice, ainsi que sur celle des hypoténuses des triangles rectangles, formés, soit des ordonnées et de leurs abscisses, soit des ordonnées et de leurs *abscisses augmentées* de la longueur du rayon, que l'on a un grand nombre de moyens de vérification pour s'assurer de l'exactitude du calcul des Tables des sinus, etc.

CHAPITRE VIII.

Formation de la troisième portion de la courbe trisectrice, par la première des deux méthodes que l'on a enseignée pour avoir le triple d'un arc. Examen de la valeur des angles dont le sommet est sur la courbe trisectrice, et dont les deux côtés passent toujours, l'un par le point d'origine de la courbe, et l'autre par le point fixe directeur du diamètre mobile. Propriété générale de la courbe trisectrice.

54. L'on a bien démontré (24, fig. 21.) la formation de la troisième portion de la courbe trisectrice, par la continuation du mouvement du diamètre mobile *BAX* pour arriver à la position *MNX*; mais cette démonstration n'est que le résultat de la seconde des deux méthodes que l'on a établies (chapitre premier) pour avoir le triple d'un arc : il est cependant essentiel de faire connaître aussi comment on détermine, par la première méthode, tous les points de cette portion de la courbe.

Formation de la troisième portion de la courbe trisectrice, par la première méthode établie pour avoir le triple d'un arc.

55. (Fig. 26.) La circonférence de cercle *AORS* étant triple de l'arc *AOD* de 120° (133°,33 etc.), et la ligne *AN* (9) étant égale à la corde *AD*; si l'on prend un arc quelconque *AOC* entre 120° (133°,33 etc.) et 180° (200°), et que l'on veuille obtenir le triple de cet arc qui sert de mesure à l'angle *ABC*, il faut, 1°. prolonger indéfiniment le côté *CB* de cet angle; 2°. par le point *A*, comme centre, avec la corde *AC* pour rayon, décrire un arc jusqu'à la rencontre en *E* du côté *CB* prolongé; 3°. par le point *E* et le point *A*, tirer la ligne *EAO* jusqu'à la rencontre intérieure en *O* de la demi-circonférence *AOR*; alors la circonférence entière *AORS* plus l'arc *AO*, sera le triple de l'arc *AOC*.

Démonstration. Les triangles *ABC* et *CAE* étant isoscèles par la construction, et ayant un angle commun en *C* sur leurs bases, sont semblables; donc l'angle *ABC* égale celui *CAE*. L'angle à la circonférence *CAO* a pour mesure la moitié de l'arc *OC*; conséquemment l'angle *CAE*, qui forme son supplément, a pour mesure la moitié de l'arc restant *CSAO*: mais les angles *CAE* et *ABC* sont égaux; donc l'arc *CSAO* est double de l'arc *AOC*; donc la circonférence *AORS* plus l'arc *AO*, forme le triple de l'arc *AOC*.

L'opération ci-dessus étant applicable à tous les arcs, depuis 120° (133°,33 etc.) jusqu'à 180° (200°) inclusivement, il est évident que l'on peut avoir le triple de ces arcs, en déterminant de la même manière tous les points E, par lesquels et le point A tirant des lignes, l'on obtient, etc.

L'on remarquera que la ligne tirée par le point E et le point A, divise en même temps, dans la même proportion, l'arc BGM de 90° (100°) et la demi-circonférence AOR.

56. (Fig. 26.) Le point E étant déterminé comme il vient d'être dit, il en résulte qu'il sert à obtenir le tiers de l'arc quelconque BG, entre zéro et 90° (100°), et conséquemment qu'il est un des points de la troisième portion de la courbe trisectrice.

Démonstration. Le triangle CAE étant isoscèle, et sa base CE, qui par la construction passe toujours par le point B, étant coupée aux points B et L, par la circonférence décrite du point A comme centre avec AB pour rayon, de manière (3) que la partie EL de cette base égale celle $BC(=AB)$, il suit que EL égale le rayon AB, et que l'arc VL (Élém. de Géom.) est le tiers de l'arc BG. Par conséquent (24) le point E est un des points de la troisième portion de la courbe trisectrice.

57. (Fig. 26.) Quoique l'on démontre rigoureusement dans les Élémens de Géométrie, qu'un arc quelconque GB, jusqu'à 135° (150°), étant donné, et qu'eu menant par l'extrémité B de cet arc une

ligne jusqu'à la rencontre en E du prolongement du diamètre GV, de manière que sur cette ligne BE la partie LE extérieure à la circonférence soit égale au rayon AB, l'on obtient l'arc VL pour le tiers de l'arc GB, on a cru entrevoir cependant que cette vérité n'était qu'une conséquence de la première méthode que l'on a donnée pour avoir un arc triple d'un autre, ainsi que l'on va s'en convaincre d'abord pour les arcs jusqu'à 90° (100°).

58. (Fig. 26.) La corde AD étant celle de l'arc de 120° (133°,33 etc.), et la corde AC soutenant un arc quelconque AOC, entre 120° (133°,33 etc.) et 180° (200°), dont le triple est égal à la circonférence de cercle plus l'arc AO, il en résulte que l'arc DC est le tiers de l'arc AO, et, par suite, que l'arc CR est le tiers de celui OCR.

L'arc quelconque BG, entre zéro et 90° (100°), ne se trouve déterminé en G par la ligne EAO, que parce que cette ligne détermine en même temps un arc AO, qui, ajouté à la circonférence de cercle, procure un arc triple de celui AOC : or cet arc BG est la moitié de l'arc OCR, de même que l'arc BI est la moitié de celui CR; mais l'arc CR est le tiers de celui OCR : donc l'arc BI est le tiers de l'arc BG.

L'on voit donc, 1°. que si l'arc BG a aussi pour tiers celui VL, ce n'est qu'en raison de l'égalité de ce dernier arc avec celui BI, égalité qui résulte nécessairement de la construction du triangle isoscèle CAE, dont les côtés et la base sont coupés

par un arc de cercle ayant son centre au sommet *A*; 2°. que cette vérité est le résultat direct de la première méthode que l'on a employée pour avoir le triple d'un arc.

Cette démonstration s'applique évidemment à tous les arcs entre zéro et 90° (100°), déterminés sur l'arc *BGM* par une ligne passant toujours par le point *A*, et menée d'un point quelconque *E* de la troisième portion de la courbe trisectrice.

Examen de la valeur des angles dont le sommet est sur la courbe trisectrice, et dont les deux côtés, ou leur prolongement, passent toujours, l'un par le point d'origine de la courbe, et l'autre par le point fixe directeur du diamètre mobile.

Nota. L'on divisera cet examen en deux parties : la première comprendra celui des angles dont le sommet est sur la première portion de la courbe, et la seconde partie embrassera celui des angles dont le sommet est sur les deux autres portions.

Examen des angles dont le sommet est sur la première portion de la courbe trisectrice.

VINGTIÈME PROPOSITION.

59. (Fig. 27.) L'angle *HSQ* dont le sommet est sur un point quelconque *S* de la première portion

ASB de la courbe trisectrice, et dont l'un des côtés *QS* passe par le point d'origine *A* de la courbe, tandis que l'autre *HS*, prolongé, passe par le point fixe *B* directeur du diamètre mobile *BAX*; cet angle, dis-je, *HSQ*, a toujours pour mesure le tiers de la demi-circonférence de cercle *BOX*, plus le tiers de l'arc *BY* déterminé sur cette même demi-circonférence par le prolongement de ses côtés.

Démonstration. Par la construction (5), le côté *HS* de l'angle *HSQ* est égal au rayon *AH*; conséquemment le triangle *HAS* est isoscèle, et ses angles sur la base *AS* sont égaux: donc l'angle au centre *HAS* ou *HAY* égale l'angle *HSQ* situé sur la courbe. Il suffira donc de démontrer que l'arc *HOY*, qui sert de mesure à l'angle *HAY*, est le tiers de la demi-circonférence *BOX*, plus le tiers de l'arc *BY* ou de son égal *XQ*.

Par la construction (4 et 5), l'arc *AI* est le tiers de l'arc quelconque *AID* entre zéro et 180° (200°); il est donc les deux tiers de sa moitié *OY*. L'arc *HX* est toujours le double de l'arc *AI*; donc il est toujours aussi le double des deux tiers de l'arc *OY*, c'est-à-dire qu'il a toujours en grandeur un tiers de plus que lui; c'est-à-dire encore, que les deux rayons à angle droit *AX* et *AO* étant supposés tourner sur le point *A*, le rayon *AX* parcourt toujours un tiers de chemin de plus que le rayon *AO*; conséquemment la distance entre leurs extrémités *H* et *Y* est toujours égale à l'arc *XO* de 90° (100°), moins le tiers de l'arc *OY* qui a été parcouru par le côté *AO*, tandis que celui *AX* a parcouru l'arc *XH*.

L'arc *HOY* étant égal à l'arc de 90° (100°), moins le tiers de celui *OY*, il suit que trois fois l'arc *HOY* égale l'arc *BOXZ*, moins trois fois le tiers de *OY*, ou moins *OY*, ou moins son égal *QZ*, ou bien égale l'arc *BOXQ*, c'est-à-dire la demi-circonférence de cercle *BOX*, plus l'arc *XQ*, ou plus son égal *BY*. Donc l'angle *HSQ*, dont le sommet est sur un point quelconque *S* de la première portion de la courbe trisectrice, a toujours pour mesure, etc.

Examen de la valeur des angles, dont le sommet est sur la seconde et la troisième portion de la courbe trisectrice.

VINGT-UNIÈME PROPOSITION.

60. (Fig. 27.) Un des angles quelconques *AEB*, *AVB*, *AUB* dont le sommet est sur la seconde ou la troisième portion *BVEK* de la courbe trisectrice, et dont les côtés passent, l'un par le point d'origine *A* de la courbe, et l'autre par le point fixe *B* directeur du diamètre mobile *BAX*; cet angle quelconque, dis-je, est toujours le tiers d'un angle qui a son sommet au point *A*, et dont les côtés sont formés, l'un, qui est invariable, par le rayon *BA*, et l'autre par le prolongement, soit *AY*, soit *AH*, soit *AN*, du côté de l'angle qui passe par le point *A*.

1°. *Démonstration pour l'angle* AEB. Par la construction du triangle isoscèle *CAE*, il suit (58) que l'arc *BF* est le tiers de l'arc *BFY*: mais l'arc *BF* sert de mesure à l'angle *BAF*; donc cet angle est

le tiers de celui *BAY* : mais l'angle *BAF* est égal par la construction à l'angle *ACB* ou *ACE*, et à l'angle *AEC* ou *AEB* ; donc l'angle *AEB* est le tiers de celui *BAY*.

2°. *Démonstration pour l'angle* AVB. Par la construction, la ligne *AT* (= *AV*) est la corde du tiers de l'arc *ATRV* ; conséquemment l'arc de 120°. (133°,33 etc.) *ATb* étant le tiers de la circonférence de cercle, il suit que l'arc *bT* est le tiers de l'arc *AV*, et par conséquent que l'arc *Mc* est le tiers de la moitié de celui *AV*, laquelle moitié égale l'arc *dZ* = *OH* ; d'où il résulte que l'arc *Bc* étant par la construction le tiers de l'arc *BcO*, cet arc *Bc* plus celui *cM* est le tiers de l'arc *BcO* plus celui *OH*, c'est-à-dire que l'arc *BM* est le tiers de celui *BOH*.

Par la construction des triangles isoscèles semblables *TAV* et *TBA*, les angles sur les bases sont égaux ; donc l'angle *BAT* est égal à celui *BTA*, donc il est aussi égal à l'angle *AVB* : mais l'angle *BAT* (= *BAM*) ayant pour mesure l'arc *BM*, est le tiers de l'angle *BAH* ; donc l'angle *AVB* est aussi le tiers de celui *BAH*.

L'on voit que si l'arc *Bd* (Élém. de Géom.) est aussi le tiers de l'arc *BOH*, c'est parce qu'il est égal à celui *BM*, en raison de la construction du triangle isoscèle *TAV*, dont les côtés sont coupés par le même arc de cercle tangent à la base *TV* et ayant son centre au sommet *A*.

L'on remarquera que l'angle *BAH* de 135° (150°) est le plus grand de ceux dont on puisse obtenir le tiers, d'après la méthode de tâtonnement indi-

quée dans les Élémens de Géométrie; attendu que la ligne BV, tirée de l'extrémité B de l'arc HOB vers le prolongement en V du diamètre HAd, est toute entière égale au rayon.

3°. *Démonstration pour l'angle* AUB. L'on prouvera de même, comme pour la démonstration précédente, que la corde $AD\,(=AU)$ étant, par la construction, celle du tiers de l'arc $ADCL$, il suit que l'arc bD est le tiers de celui AVL; que l'arc cY, moitié de l'arc bD, est le tiers de la moitié de l'arc AVL, c'est-à-dire de l'arc GZ ou de son égal ON; que l'arc Bc étant, par la construction, le tiers de l'arc BcO, l'arc Bc plus l'arc cY est le tiers de l'arc BO plus celui ON, c'est-à-dire que l'arc BY est le tiers de l'arc BON; que l'angle BAD ayant pour mesure le tiers BY de l'arc BON, cet angle est le tiers de celui BAN; qu'à cause des triangles isoscèles semblables par la construction DAU et DBA, les angles sur les bases étant égaux, l'angle BAD égale celui BDA, égale celui AUD ou AUB: donc l'angle AUB est le tiers de l'angle BAN.

Donc un angle quelconque, dont le sommet est sur un des points de la seconde ou de la troisième portion de la courbe trisectrice, etc. est toujours le tiers d'un angle, etc.

L'on remarquera que, pour avoir le tiers d'un angle quelconque BAN au-dessus de 135° (150°) jusqu'à 180° (200°), il faut prolonger le diamètre NAG jusqu'à la rencontre en U de la courbe, et mener ensuite, par le point U et par l'extrémité B de l'arc

NOB, une ligne qui coupe cet arc au point *M*; alors l'arc *GM*, compris entre l'extrémité *G* du diamètre *NAG* et le point de section *M*, est égal au tiers de l'arc *NOB*; car le triangle *DAU* étant isoscèle par la construction, et ayant ses côtés et sa base coupés par un arc de cercle dont le centre est au sommet *A*, il suit que les arcs *BG* et *MY* sont égaux, et conséquemment que l'arc *BY* égale celui *GM*.

C'est la marche constante et uniforme que fournissent les deux dernières portions *BVEK* de la courbe trisectrice, pour avoir directement sur la demi-circonférence *BOX* le tiers d'un arc ou d'un angle quelconque, qui a fait penser que la manière de l'obtenir jusqu'à 135° (150°) seulement, par le moyen indiqué dans les Élémens de Géométrie, n'était qu'une conséquence directe de la première des deux méthodes que l'on a employée pour avoir le triple d'un arc quelconque.

Propriétés générales de la Courbe trisectrice.

61. La première propriété générale de la courbe trisectrice, d'après ce qui a été démontré (8, 9 et 40), consiste, 1°. en ce que, si du point d'origine de la courbe l'on mène des cordes vers tous les autres points de la circonférence, la partie de chacune de ces cordes (ou la corde plus la partie de son prolongement), comprise entre le point d'origine et les deux premières portions de la courbe, est toujours égale à la corde du tiers de l'arc soutenu par chaque corde; 2°. en ce que les lignes tirées du point d'origine de la courbe vers sa troisième por-

tion, sont toujours égales aux cordes du tiers des arcs se composant de la *circonférence augmentée* de la grandeur des arcs soutenus par le prolongement desdites lignes.

En résumé : la première propriété de la courbe trisectrice est de procurer la corde du tiers de tous les arcs, depuis le plus petit jusqu'à une circonférence et demie ; et si, comme on le verra dans la partie analytique, l'on décrit encore la courbe du côté opposé, c'est-à-dire si on la ferme, cette première propriété s'étendra jusqu'à trois circonférences.

La seconde propriété générale de la courbe résulte des vérités démontrées (17 et 38), et elle consiste en ce que les lignes menées du point d'origine de la courbe trisectrice vers tous ses autres points, sont égales à toutes les cordes des arcs, depuis la plus petite jusques et y compris celle de l'arc de 180° (200°); ou bien, en ce qu'une ligne menée du point d'origine de la courbe vers un quelconque de ses autres points, a toujours sa correspondante égale parmi les cordes des arcs, depuis le plus petit jusqu'à celui de 180° (200°) inclusivement, *et vice versâ;* de manière qu'il y a correspondance parfaite, de chaque côté, dans le nombre et dans l'égalité des lignes.

Ces deux propriétés constituent essentiellement la courbe trisectrice.

Nota. L'on ne parle point ici de la courbe que décrit l'extrémité *B* du diamètre mobile *BAX*, pendant le même temps que son milieu *A* trace la courbe trisectrice; il en sera fait mention dans la partie analytique qui fait l'objet du chapitre dixième.

CHAPITRE IX.

Quelques réflexions sur la courbe trisectrice et sur sa seconde propriété générale.

62. (Fig. 10.) Si l'on se rappelle que le diamètre mobile *BAX* tournant sur le point *B* comme pivot, et glissant en même temps sur ce point, son extrémité *X* décrit l'arc de cercle *XDC* de 120° (133°,33 etc.) pendant que le point *A*, milieu de ce diamètre, trace la première portion *AAAAB* de la courbe trisectrice; si, pendant ce mouvement, l'on considère ce diamètre mobile *BAX* comme formant deux leviers *BX* et *BA*, dont l'un est double de l'autre, et dont les points d'appui sont au même point *B*, il est évident, 1°. que les points *X* et *A* ont parcouru dans le même espace de temps, l'un l'arc de cercle *XDC* de 120° (133°,33 etc.), et l'autre la première portion *AAAAB* de la courbe trisectrice; 2°. que le levier *BX* a diminué de moitié, tandis que celui *BA* a été réduit à zéro.

Le mouvement de ces deux leviers s'opérant simultanément et dans le même espace de temps, puisqu'ils ne forment proprement qu'un levier sur lequel le plus petit n'est distingué que par sa lon-

gueur, il en résulte nécessairement qu'il existe un rapport entre les espaces parcourus par les extrémités X et A de ces deux leviers.

63. (fig. 28.) Si le diamètre BAX, en conservant sa longueur, ne faisait que tourner sur le point B, il est clair que les deux leviers BA et BX étant constamment entre eux dans le rapport d'un à deux, et le temps étant le même, les espaces parcourus seraient aussi dans le même rapport.

Mais dans le mouvement que nous examinons, soit que le levier BX tourne sur le point B comme pivot pour décrire l'arc de 60° (66°,66 etc.) XV, soit qu'il glisse sur le point B pendant que son extrémité X décrit l'arc de cercle XDC de 120° (133°,33 etc.), dans l'un comme dans l'autre cas les espaces parcourus sont égaux, le temps employé est le même, et cependant, dans le second cas, le levier a diminué de moitié; tandis que le levier BA devenant zéro dans ce deuxième cas, en raison de sa diminution constamment égale à celle du levier BX, son point A parcourt nécessairement, dans le même temps, un espace plus grand que celui AC qu'il aurait parcouru dans le premier cas. Quel est donc, dans ce second cas, le rapport entre les espaces parcourus par les extrémités X et A des deux leviers BX et BA?

Nous n'entrerons à cet égard dans aucun détail, et nous nous bornerons seulement à indiquer les données du problème; mais auparavant il est bon d'observer, pour plus de clarté, que l'on peut con-

sidérer les deux leviers BX et BA comme tournant sur le pivot B, de manière que leur diminution s'opère par leurs extrémités X et A ; alors les données se réduisent aux suivantes :

Dans leur mouvement simultané de rotation sur le même pivot et sous le même angle de 60° (66°,66 etc.), deux leviers, toujours sur la même ligne, étant entre eux dans le rapport de deux à un au moment du départ, le plus grand diminuant de moitié pendant qu'il décrit un arc de cercle de 120° (133°,33 etc.), l'autre diminuant en totalité pendant qu'il trace une courbe, et le temps employé à parcourir les espaces étant le même, déterminer le rapport entre les espaces parcourus par les extrémités de ces deux leviers.

Ce rapport étant connu, si l'on parvenait à établir la longueur de la courbe tracée par l'extrémité du petit levier, il est certain que l'on obtiendrait aisément une ligne égale en longueur à l'arc de cercle de 120° (133°,33 etc.), et conséquemment une ligne égale à la circonférence de cercle triple de l'arc de 120° (133°,33 etc.).

Nous laissons l'un et l'autre problème à résoudre, et nous passons à quelques réflexions, auxquelles donne lieu la seconde propriété générale de la courbe trisectrice.

64. Cette propriété générale de la courbe consistant en ce qu'une ligne menée de son point d'origine vers un quelconque de ses autres points, a toujours sa correspondante égale parmi les cordes des arcs, de-

puis le plus petit jusqu'à celui de 180° (200°) inclusivement (appartenant à un cercle dont le diamètre est égal à la distance entre les deux points extrêmes de la courbe), *et vice versâ*, de manière qu'il y a correspondance parfaite de chaque côté dans le nombre et dans l'égalité des lignes, il suit évidemment que la demi-circonférence de cercle donne, ainsi que la courbe, l'augmentation progressive de toutes les cordes depuis la plus petite jusqu'à celle de 180°(200°) inclusivement, et qu'il en est de même de la diminution.

La seconde propriété générale de la courbe est donc commune à la demi-circonférence de cercle.

65. (Fig. 28.) Si l'on compare la courbe trisectrice *APQRK* avec la demi-circonférence *AIK*, il est de toute évidence que la longueur de la courbe est plus grande que celle de la demi-circonférence. Cela posé, comment concevoir qu'entre les lignes menées du point *A* vers la courbe, et entre celles menées du même point vers la demi-circonférence, il y a égalité, non-seulement dans le nombre de lignes, mais encore dans la longueur des lignes correspondantes ?

Abstraction faite de la démonstration géométrique que nous en avons donnée, nous allons examiner comment on peut concevoir cette vérité.

Si du point *A*, extrémité du diamètre *AK*, comme centre, l'on mène, de tous les points de la demi-circonférence *AIK* vers ce diamètre, des arcs de cercle tels que *OL*, *OL*, *OL*, etc., il est

évident que toutes les cordes, depuis la plus petite jusqu'à celle de 180° (200°), existent sur ce diamètre à partir du point *A*, comme elles existent sur la demi-circonférence à partir du même point.

Voilà donc deux grandeurs évidemment inégales, la demi-circonférence et son diamètre, vers les points desquelles on ne peut mener, du point commun d'origine *A*, que le même nombre de lignes égales chacune à chacune.

Le diamètre *AK* étant une grandeur divisible à l'infini, soit par des lignes menées sur lui du sommet d'un triangle qui aurait pour base ce diamètre, soit par des arcs de cercle décrits de son extrémité *A* comme centre, et ayant pour rayons la suite des termes de la progression arithmétique infinie, depuis zéro jusqu'à la valeur *AK* du diamètre; si l'on conçoit que ces rayons, dont le nombre est infini, tournent autour du centre *A* pour se développer, il est évident que, selon le mode du développement de tous ces rayons, leurs extrémités donneront soit la demi-circonférence de cercle *KIA*, soit la courbe trisectrice *KRQPA*.

Telle est la manière simple et claire dont nous avons conçu, que, du point commun d'origine *A*, l'on pouvait mener vers les deux grandeurs inégales, la demi-circonférence *AIK* et la courbe *APQRK*, le même nombre de lignes toutes égales chacune à chacune.

Nous terminons, en établissant le principe suivant qui résulte de ce qui vient d'être dit.

Une ligne quelconque AB étant donnée ; si l'on développe sur le point A, comme pivot, les rayons formant la suite des termes d'une progression arithmétique infinie depuis zéro jusqu'à la valeur AB, l'on formera toujours une grandeur régulière ou irrégulière plus ou moins variée dans ses formes et plus ou moins étendue, selon le mode de développement que l'on suivra ; mais tous les points de cette grandeur iront constamment en se rapprochant du point A, où elle se termine.

QUATRIÈME PARTIE.

CHAPITRE X.

Application de l'Analyse aux considérations précédentes.

Nous résumerons la génération de la courbe trisectrice, et nous ferons ensuite quelques observations nécessaires pour l'intelligence de quelques points des recherches qui vont suivre.

Qu'on imagine du point A (fig. 29) des cordes à tous les points de la circonférence dont le centre est en C; si du même point, avec des ouvertures de compas, égales aux cordes des arcs tiers, on coupe celles des arcs triples, la suite de ces intersections sera la trisectrice.

Ainsi, par exemple, si l'arc tiers est de 20°, auquel cas l'arc triple est de 60°, le point K sera l'intersection de la corde de 60° par celle de 20°.

Mais lorsqu'on a employé toutes les cordes des arcs tiers depuis 0 jusqu'à 120° pour couper celles des arcs triples, on a fait en arcs triples un tour de circonférence, et en même temps on a tracé la portion $ANCDE$ de la courbe en question.

Si donc on voulait employer en cordes d'arcs tiers, celles des arcs qui excèdent 120°, ou, en d'autres termes, si on voulait continuer la trisectrice au-delà du point E, le problème de la trisection s'étendrait, ainsi que l'exige l'analyse, à des arcs plus grands que la circonférence.

Ainsi pour des cordes, à partir de celle de 120° jusqu'à celle de 180°, considérées comme cordes d'arcs tiers, les intersections avec celles des arcs triples, auront lieu depuis E

jusqu'en F; et il faut bien observer que si, par exemple, l'arc tiers est de 140°, auquel cas l'arc triple est de 420°, ou de 360° + 60°, l'intersection sera sur le prolongement de la corde de 60°, c'est-à-dire entre E et F en K'.

On n'a encore employé que les cordes des arcs tiers de 0° à 180°, et comme la corde de ce dernier arc est un *maximum*, le point F est le plus éloigné du point A, et la distance... $AF=2$, en désignant par 1 le rayon du cercle; pour ce point, l'arc triple est d'une circonférence et demie.

Pour construire le point de la trisectrice, qui correspond à l'arc de 260°, considéré comme tiers, on observera que, comme l'arc triple est de deux circonférences plus 60°, dont la corde est encore celle de 60°, il faudra couper cette corde prolongée par un arc décrit de A, comme centre, avec la corde de 260 qui n'est que celle de 100°, et alors on aura le point K''.

Lors donc qu'on emploie les cordes des arcs de 180° à 360° considérés comme arcs tiers, on continue la trisectrice, et on en décrit la portion $FGCA$.

On a donc remarqué que la corde d'un arc triple fait trouver trois arcs tiers différens; car celle de 60° rencontrant la trisectrice dans les points K, K' et K'', si de A comme centre, avec des ouvertures de compas AK, AK', AK'' comme rayons, on décrit des arcs de cercle jusqu'à la circonférence, dont le centre est C, on aura les points m, m', m'', tels que les arcs Am; Amm', $Amm'm''$ seront les tiers de 60°, d'une circonférence plus 60°, de deux circonférences plus 60°.

Ainsi cette trisectrice, pour être complète, c'est-à-dire, pour résoudre le problème avec toute l'étendue qu'il comporte et que donne l'analyse, doit répondre à trois tours de circonférence, ou être le lieu des intersections des cordes des arcs de 0° à trois circonférences, pris comme arcs triples, par celles des arcs tiers, ou de 0° à 360°.

On observera enfin que, pour les arcs triples de 0° à 180°, les intersections sont au-dessus de CF, et qu'elles forment la portion ANC; que de 180 à 360°, elles sont au-des-

sous de CF, et qu'elles donnent CDE; que de 360° à 360° + 180°, elles donnent la portion EF; que de 360° + 180° à 2 fois 360°, elles sont au-dessus de CF, et qu'elles donnent la portion FG; que de 2 fois 360° à 2 fois 360° + 180°, elles sont encore au-dessus de CF, et qu'elles prolongent la courbe de G en C; enfin que de 2 fois 360° + 180° à 3 fois 360°, elles complètent la courbe, en donnant la portion CIA.

Si l'on pliait la figure suivant l'axe CF, les portions inférieures de la courbe s'appliqueraient exactement, point pour point, sur les portions supérieures : cette symétrie résulte évidemment de la construction.

Mais d'une proposition démontrée (3) résulte cette seconde construction de la courbe : qu'on décrive une autre circonférence de A comme centre avec AC pour rayon; qu'on imagine de C des cordes à tous les points de cette seconde circonférence, et que, de l'extrémité de chacune d'elles, de R, par exemple, on porte $RL = RK =$ rayon du cercle, les extrémités L et K seront à la trisectrice.

Ainsi les distances RL et RK sont partout égales entre elles et au rayon du cercle, propriété qui donne en même temps deux points de la courbe, et de laquelle on tire son équation polaire, comme nous le verrons bientôt.

On est naturellement conduit par cette seconde construction de la courbe par points, à sa description par un mouvement continu.

Si l'on conçoit un bras de levier CAF, d'une longueur égale à trois fois le rayon du cercle dans lequel on opère la trisection des angles, et qu'on assujétisse le point M du levier, à se mouvoir suivant la circonférence $MRCM$ qui sera la directrice du mouvement, et ce bras de levier à passer continuellement par C dans toutes ses positions; qu'on suppose en A et F deux points décrivans, ou deux styles, F décrira la branche FG, pendant que A décrira la branche ANC. Le levier étant arrivé dans la direction LKC, par exemple, l'extrémité C aura été repoussée en C', de manière que la partie CC' ajoutée à LC fasse trois rayons, ou la longueur primitive CF,

Le lieu des points C' est une nouvelle courbe qu'il importe d'examiner.

Lorsque les points décrivans F et A sont, le premier en G, le second en C, ce qui arrive lorsque M a parcouru l'arc MRM', le point C' est sur le prolongement de la tangente $GM'C$, de manière que CC' soit un rayon, puisque CG vaut deux rayons. Le point M arrivant en C, le style F est en H, le style A en D, et le point C' en Y, ensorte que HY soit toujours trois fois le rayon. Lorsque le point M continue à se mouvoir suivant l'arc $CR'M$, le style A qui était en D, trace l'arc de trisectrice DEF, et le style F qui était en H, trace l'arc $HCIA$. Alors le bras de levier est placé en sens contraire ; puisque le point décrivant F est en A, et que A est en F ; conséquemment C, ou le point correspondant de la courbe des points C', se trouve à gauche de F, c'est-à-dire, en X où se termine la courbe des points C', à une distance AX du point A, égale à trois rayons, ou à une distance FX du point F, égale à un rayon.

Ainsi, avec deux styles on décrit toute la trisectrice, le point M ne faisant qu'un tour de circonférence, et alors la courbe des points C' n'est pas fermée.

Supposons maintenant qu'on n'ait que le seul style F, tout d'ailleurs restant le même ; le point M ayant parcouru l'arc MRC, le point F a décrit FGH; lorsque M a achevé son tour de circonférence, F qui était en H, a décrit $HCIA$, et le point C a tracé correspondamment la portion de courbe $CC'C'YX$. Alors le levier se trouve dans une position contraire, car C est en X, et F en A, M est de retour en M. Ce point M continuant à se mouvoir suivant MRC, F qui est en A, décrit $ANCD$, de sorte que le point F est en D, et la courbe des points C' se trouve tracée jusqu'à Y': M qui est en C, achevant son second tour de circonférence, le style que nous avons laissé en D, termine la trisectrice par l'arc DEF; de sorte que le levier se retrouve dans sa première position, c'est-à-dire que la courbe des points C' vient se fermer en C.

Pour décrire la totalité de la trisectrice avec un seul style

F, il faut faire faire au point M deux tours de circonférence ; mais alors, ainsi qu'on vient de le voir, la courbe des points C' est fermée, et cette courbe est, comme la trisectrice, divisée symétriquement par la ligne CF.

Au moyen de cette courbe seule, on peut avoir un arc triple par son tiers ; car Am étant l'arc donné, on mènera mCC' ; puis, à partir de C', on prendra $C'K =$ rayon, et menant la ligne AK prolongée jusqu'à la circonférence en M', on aura arc $AM' = 3Am$.

Archimède, dans ses lemmes, proposition VIII, a démontré ce théorème.

Si une corde AB *d'un cercle est prolongée, et si l'on fait* BC *égal au rayon de ce cercle ; si ensuite on joint le point* C *et le centre* D *du cercle, et si l'on prolonge* CD *jusqu'en* E, *l'arc* AE *sera le triple de l'arc* BF.

En effet (fig. 30), menons EG parallèle à AB, et joignons DB, DG. Puisque l'angle DEG est égal à l'angle DGE, l'angle CDG sera double de l'angle DEG. Mais l'angle BDC est égal à l'angle BCD, et l'angle CEG égal à l'angle ACE ; donc l'angle GDC sera double de l'angle CDB, et l'angle entier BDG sera triple de l'angle BDC ; donc l'arc AE qui est égal à BG, sera triple de l'arc $BF.C.Q.F.D.$

Il est aisé maintenant de déduire de là un procédé pour trouver le tiers d'un arc donné. On imaginera du point A (fig. 31) des cordes AB à tous les points de la circonférence, et on prolongera chacune d'elles d'une longueur BC, égale au rayon du cercle ; le lieu des points C sera une courbe $CC'C''$, etc. Cette courbe étant construite, qu'on veuille trouver le tiers de l'arc AE, on mènera par E et par le centre O une droite EFC prolongée jusqu'en C, puis on joindra C et A ; l'arc BF ainsi déterminé, sera, d'après le théorème précédent, le tiers de l'arc AE.

Pour avoir les points extrêmes M et N de la courbe, on mènera au point A une tangente indéfinie sur laquelle on prendra, à partir du point A, $AM = AN =$ rayon. En effet, le triangle AOM étant isoscèle, l'arc AK est de 45°, tiers de

l'arc *AEL* qui est de 135°. Cette courbe *MCC'C''...N* est une portion de la *trisectrice* complète, comme il est aisé de le reconnaître.

La trisectrice donne donc la solution graphique de ces deux énoncés :

1°. *Étant donnée la corde d'un arc, trouver celle de l'arc triple.*

2°. *Connaissant la corde de l'arc triple, trouver celle de l'arc simple*, ou *connaissant la corde d'un arc, trouver celle de son tiers.*

Pour écrire algébriquement cette dernière question, soient (fig. 32) *AO* la corde d'un arc et *AC* ou *AE* celle de son tiers. Ayant prolongé *CB* jusqu'à la rencontre de la circonférence en *M*; on aura deux cordes *CM* et *AO* qui se coupent dans un cercle, et qui donnent cette propriété

$$AE \times EO = CE \times EM \ldots\ldots (1)$$

Mais d'ailleurs des triangles isoscèles semblables *CAE*, *CAB*, on déduit $CE = \frac{\overline{CA}^2}{r}$, et on a $EM = r + EB$, $EB = r - CE$; donc $EM = 2r - \frac{\overline{CA}^2}{r}$; ; ainsi désignant l'arc *AO* par φ, et conséquemment l'arc *AC* par $\frac{1}{3}\varphi$, cord. $\frac{1}{3}\varphi$ par x et cord. φ par m, on trouvera, après les substitutions dans (1) et les réductions,

$$x^3 - 3r^2x + mr^2 = 0 \ldots\ldots (2)$$

Mais si on veut en revenir à l'équation donnée par le problème de la trisection de l'angle, qu'on fasse $\cos\frac{1}{3}\varphi = y$ et $\cos\varphi = a$: on aura ces deux proportions

$$2r : x :: x : r - y ; \quad 2r : m :: m : r - a,$$

d'où l'on déduit

$$x^2 = 2r(r - y) ; \quad m^2 = 2r(r - a) :$$

multipliant (2) par x; faisant ensuite ces substitutions, puis

élevant au carré et réduisant, on trouve enfin

$$y^3 - \frac{3}{4}r^2y = \frac{r^2a}{4},$$

et, dans l'hypothèse $r = 1$,

$$y^3 - \frac{3}{4}y - \frac{a}{4} = 0 \ldots\ldots (3)$$

équation qui a pour racines les cosinus des arcs tiers de ceux dont le cosinus est a.

La forme de la trisectrice conduit naturellement à rechercher d'abord son équation polaire.

A cet effet, supposons (fig. 29) le rayon $AC = 1$, prenons le centre C pour point de départ des rayons vecteurs, menons CNN' qui rencontre la trisectrice en N et N', puis joignons les points A, B : le triangle isoscèle BAC donne la proportion

$$CB : \sin BAC :: AC : \sin \varphi,$$

φ étant l'angle BCA : or $\sin BAC = \sin 2\varphi$, d'ailleurs

$$CB = CN' - N'B = CN + NB = z \mp 1;$$

donc la proportion précédente devient

$$z \mp 1 = \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi} = 2\cos\varphi, \text{ d'où } z = 2\cos\varphi \pm 1 \ldots. (4)$$

en observant que le signe supérieur se rapporte à la portion $CGFEC$, et que le signe inférieur se rapporte aux points de la feuille $CNAC$.

Pour $\varphi = 0$, on trouve $z = 3$, $z = 1$, c'est-à-dire, les points A et F.

Pour $\varphi = 60°$, auquel cas $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, on a $z = 2$, $z = 0$, c'est-à-dire les points G et C.

A $\varphi = 90°$, correspondent $z = 1$, $z = -1$, c'est-à-dire les points D et H.

A $\varphi = 180°$, correspondent $z = -1$, $z = -3$, ou les points A et F déjà trouvés.

On peut vérifier l'équation (4) ainsi qu'il suit :

L'angle ACK étant $= \varphi$, et l'angle $ACM' = 3\varphi$, on a, pour le rayon $= 1$,

$$\overline{AK}^2 = 2^2\sin^2\varphi + (1 - 2\cos\varphi)^2 = (2 - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi,$$

$$\overline{AM'}^2 = 2(1 - \cos 3\varphi) \ (*);$$

d'où résulte

$$\frac{\overline{AK}^2}{\overline{AM'}^2} = \frac{(2 - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}{2(1 - \cos 3\varphi)},$$

et, d'après l'équation (4) rapportée au rayon, l'unité

$$\frac{\overline{AK}^2}{\overline{AM'}^2} = \frac{(\cos\varphi \pm 1)^2 + \sin^2\varphi}{2(1 - \cos 3\varphi)} = \frac{1 \pm \cos\varphi}{1 - \cos 3\varphi}$$

$$= \frac{1 \pm \cos\varphi}{1 + 3\cos\varphi - 4\cos^3\varphi},$$

en observant que

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi.$$

Mais en désignant, comme nous l'avons fait plus haut, la corde AK par x, AM' par m, $\cos\varphi$ par y, et $\cos 3\varphi$ par a, on trouve d'abord

$$x^2(1 + 3y - 4y^3) = m^2(1 - y);$$

puis, après avoir remplacé x^2 et m^2 par $2(1-y)$, et $2(1-a)$,

$$2(1 - y)(1 + 3y - 4y^3) = 2(1 - a)(1 - y),$$

(*) On trouve en Trigonométrie cette formule :

$$\cos ACM' = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{CM'}^2 - \overline{AM'}^2}{2.AC.CM'} = \frac{2 - \overline{AM'}^2}{2}$$

pour le rayon $= 1$; donc

$$\cos 3\varphi = \frac{2 - \overline{AM'}^2}{2}.$$

et enfin

$$4y^3 - 3y = a.$$

Pour rapporter la courbe à des axes rectangulaires $Y'Y$, CX (fig. 29) qui se coupent au centre C, on observera que, dans le triangle NPC où $CP = x$, $PN = y$ et $CN = z$, on a

$$y = z \sin \varphi, \quad x = z \cos \varphi;$$

donc

$$z = \sqrt{y^2 + x^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}}.$$

Reportant ces valeurs de $\cos \varphi$ et de z dans l'équation polaire, faisant disparaître le radical, et réduisant, on trouvera

$$y^4 + (2x^2 - 4x - 1)y^2 + x^2(x^2 - 4x + 3) = 0,$$

ou bien

$$y^4 + (2x^2 - 4x - 1)y^2 + x^2(x - 3)(x - 1) = 0 \ldots (5)$$

équation du quatrième degré résoluble à la manière de celles du second, ainsi qu'on devait s'y attendre d'après la symétrie de la courbe par rapport à l'axe des abscisses.

Pour $y = 0$, l'équation donne ces quatre valeurs de x, savoir, $x = 0$, $x = 0$, $x = 3$, $x = 1$, dont les deux premiers correspondent au point C qui est double, et les deux derniers aux points F et A, en observant que les abscisses positives s'étendent à gauche de l'axe des y.

Pour $x = 0$, on a $y = 0$, $y = 0$, et $y = \pm 1$, résultats conformes à la vérité.

La formule générale des sous-tangentes devient, pour la trisectrice rapportée aux coordonnées rectangulaires,

$$y \frac{dx}{dy} = \frac{+(2x^2 - 4x - 1)y^2 + 2x^2(x^2 - 4x + 3)}{2(x - 1)y^2 + (2x^3 - 6x^2 + 3x)}.$$

Mais de l'équation de la courbe on déduit ces deux valeurs

de y^2,

$$y^2 = -\frac{1}{2}(2x^2 - 4x - 1) \pm \frac{1}{2}(\sqrt{8x+1});$$

d'où résulte

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{-\frac{1}{2}(8x+1) \pm \frac{1}{2}(2x^2-4x-1)\sqrt{8x+1}}{-1 \pm (x-1)\sqrt{8x+1}},$$

et enfin

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{-(8x+1) \pm (2x^2-4x-1)\sqrt{8x+1}}{-2 \pm 2(x-1)\sqrt{8x+1}};$$

le signe supérieur se rapportant à la branche *CGFE*, et l'inférieur à la feuille *CNAI*.

Faisons d'abord $x = 0$ dans cette formule, et nous aurons cette double expression de la sous-tangente que nous désignerons par S,

$$S = \frac{-1 \pm (-1)}{-2 \pm (-2)},$$

savoir $\frac{1}{2}$ pour les points H et D, et $\frac{0}{0}$ pour le point C qui est un point multiple; mais si l'on cherche la valeur vraie de cette fraction, en écrivant $x+i$ pour x, puis faisant dans les deux termes $x = 0$, après les avoir divisés par i, on la trouvera $= 0$.

Pour $x = 1$, on aura

$$S = \frac{-9 \pm (-9)}{-2},$$

c'est-à-dire, zéro pour le point A, et $\frac{-18}{-2}$ ou 9 pour les points G et E, la sous-tangente étant comptée du point A.

Pour $x = 3$, abscisse du point F, la formule donne

$$S = \frac{-25 \pm 25}{-2 \pm 20} = 0,$$

en observant qu'on ne doit prendre ici que le signe supérieur.

Si l'on veut connaître l'abscisse du point le plus élevé dans chaque branche, il faut égaler à zéro le dénominateur de la formule de la sous-tangente, c'est-à-dire résoudre l'équation

$$-2 \pm 2(x-1)\sqrt{8x+1} = 0;$$

elle devient, en élevant au carré et réduisant,

$$x^3 - \frac{15}{8}x^2 + \frac{3}{4}x = 0,$$

et après avoir divisé par x,

$$x^2 - \frac{15}{8}x + \frac{3}{4} = 0,$$

dont les racines sont

$$x = \left\{\frac{15 \pm \sqrt{33}}{16}\right\} :$$

or 33 étant moindre que 36, la valeur de x qui correspond au signe inférieur du radical, est $< \frac{21}{16}$, ou $< 1 + \frac{5}{16}$, c'est-à-dire moindre que la moitié de CF qui est $1 + \frac{1}{2}$. Pour le signe inférieur, l'abscisse x est, de très-peu, $> \frac{9}{16}$, ou plus grande que la moitié de CA.

On trouve, pour l'expression de la sous-normale rapportée aux coordonnées rectangulaires, toutes les réductions faites,

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{(10x^2-11x-2) \pm (-2x^3+6x^2-3x-2)\sqrt{8x+1}}{-(8x+1) \pm (2x^3-4x^2-1)\sqrt{8x+1}}.$$

Pour $x = 0$, la sous-normale que nous désignerons par S', devient

$$S' = \frac{-2 \pm (-2)}{-1 \pm (-1)};$$

et en prenant le signe supérieur, on trouve $S' = 2$; donc aux points H et D, la sous-normale est égale au diamètre du cercle. Au signe inférieur, répond $S' = \frac{0}{0}$ dont il sera facile d'obtenir la valeur vraie.

L'expression de la sous-tangente pour les coordonnées po-

laires, est

$$S = \frac{z^2 d\varphi}{dz} = -\frac{(2\cos\varphi \pm 1)^2}{2\sin\varphi} = -\frac{z^2}{2y};$$

longueur facile à construire et qu'il faut porter sur une perpendiculaire menée par C au rayon vecteur au point de la courbe qu'on considère; or pour $\varphi = 90°$, on a

$$S = -\frac{1}{2};$$

c'est effectivement ce que nous avons trouvé plus haut pour les points H et D.

Pour $\varphi = 60°$, auquel cas, $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on trouve

$$S = \frac{(1 \pm 1)^2}{\sqrt{3}},$$

d'où $S = \frac{4}{\sqrt{3}}$; $S = 0$.

Au reste, nous reviendrons à la fin de cet écrit sur le problème des tangentes, et nous en donnerons une solution graphique très-simple.

On trouve dans les Traités de calcul différentiel cette formule du rayon de courbure pour les coordonnées polaires,

$$R = \frac{\left\{\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 + z^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{2\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 - z\frac{d^2z}{d\varphi^2} + z^2};$$

or l'équation de la trisectrice rapportée à ces coordonnées, étant

$$z = 2\cos\varphi \pm 1,$$

on a $\frac{dz}{d\varphi} = -2\sin\varphi$; $\frac{d^2z}{d\varphi^2} = -2\cos\varphi$; faisant ces substi-

tutions dans R, et réduisant, on obtient

$$R = \frac{(5 \pm 4\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}{9 \pm 6\cos\varphi}.$$

Dans l'hypothèse $\varphi = 0$, cette formule donne pour le signe supérieur, $R = \frac{9}{5}$, et pour le signe inférieur, $R = \frac{1}{3}$. Si du point F auquel se rapporte le rayon de courbure $R = \frac{9}{5}$, on prend sur FC une longueur $FO = \frac{9}{5} = 1 + \frac{4}{5}$, on aura $CO = 3 - \frac{9}{5} = \frac{6}{5}$.

La circonférence du cercle osculateur en F, coïncide avec la trisectrice dans une très-grande étendue.

Pour s'en assurer, soit (fig. 33) $F\mu'$ un arc de cercle osculateur en F; menons $O\mu'$ qui rencontre la trisectrice en μ, et joignons $C\mu$ qui sera z. Dans le triangle $OC\mu$, on a la proportion

$$z + CO : z - CO :: \text{tang}\tfrac{1}{2}(O+\mu) : \text{tang}\tfrac{1}{2}(O-\mu),$$

d'où

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(O-\mu) = \frac{z-CO}{z+CO}\,\text{tang}\tfrac{1}{2}(O+\mu).$$

Prenant $\varphi = 60°$, on aura $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $z = 2$, et

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(O-\mu) = \frac{z-CO}{z+CO}\,\text{tang}\left(\tfrac{1}{2}O+\mu\right);$$

mais on a trouvé $CO = \frac{6}{5}$; donc

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(O-\mu) = \frac{1}{4}\,\text{tang}\tfrac{1}{2}(O+\mu)$$
$$= \frac{1}{4}\,\text{tang}\,60°,$$

à cause de $O + \mu = 120°$. On conclut de là

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}(O-\mu) = 11°\ 31'\ 9'',4 \\ \text{mais } \frac{1}{2}(O+\mu) = 60°;\end{array}\right\} \text{donc} \left\{\begin{array}{l} O = 71°\,31'\,49'',4; \\ \mu = 48°\,28'\,10'',6.\end{array}\right.$$

On a donc pour calculer $O\mu$, la proportion

$$O\mu : \sin\varphi :: 2 : \sin O,$$

qui donne

$$O\mu = 1{,}83,$$

dont le dernier chiffre est un peu trop fort; et la différence

$$O\mu' - O\mu = 1{,}83 - \frac{9}{6} = 1{,}83 - 1{,}8 = 0{,}03.$$

Ainsi la divergence des points μ' et μ est de moins de trois centièmes du rayon pour un angle $\varphi = 60°$.

La projection du rayon de courbure sur le rayon vecteur au point de contact, ou le sous-rayon vecteur que nous nommerons R', a pour expression

$$R' = \frac{z\left\{\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 + z^2\right\}}{2\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 - z\cdot\frac{d^2z}{d\varphi^2} + z^2},$$

qui devient par la substitution des valeurs données plus haut,

$$R' = \frac{\{14\cos\varphi \pm (5 + 8\cos^2\varphi\}}{9 \pm 6\cos\varphi}.$$

Cette formule donne pour $\varphi = 0$, en prenant le signe supérieur, $R' = \frac{27}{15} = \frac{9}{5}$, et, pour le signe inférieur, $R' = \frac{1}{3}$, c'est-à-dire (fig. 29) les longueurs des rayons de courbure en A et F, ce qui doit être, puisque, pour ces points, le centre du cercle osculateur est sur les rayons vecteurs CF et CA.

La ligne $z - R'$ serait l'abscisse du centre du cercle osculateur, comptée du point C sur le rayon vecteur au point de contact, et on trouve, après les réductions,

$$z - R' = X = \frac{2\{5\cos\varphi \pm 2(\cos^2\varphi + 1)\}}{9 \pm 6\cos\varphi}.$$

L'ordonnée correspondante est $Y = \sqrt{R^2 - R'^2}$, d'où résulte

$$Y = \frac{\{100 \pm 160\cos\varphi - 36\cos^2\varphi \pm (-160\cos^3\varphi) - 64\cos^4\varphi\}}{(9 \pm 6\cos\varphi)^2}.$$

Cette formule, dans l'hypothèse $\varphi = 0$, donne, pour le double signe, $Y = 0$, ce qui doit arriver, puisqu'alors le centre du cercle de courbure est sur le rayon vecteur mené aux points de contact A et F.

Ces valeurs de X et Y donnent donc les coordonnées du centre du cercle osculateur, comptées du point C sur chaque rayon vecteur.

Nous ramènerons ces coordonnées à des coordonnées rectangulaires comptées de l'origine C (fig. 34).

Soient, à cet effet, $Cp = X$, $pM = Y$, $CP = x$, $PM = y$, M étant le centre du cercle osculateur en N: on a

$$y = pp' - Mn, \quad x = Cp' + p'P :$$

or

$$\left.\begin{array}{l} Mn : Y :: \sin Mp''P \text{ ou } \cos\varphi : 1 \\ pp' : X :: \sin\varphi : 1 \\ Cp' : X :: \cos\varphi : 1 \\ p'P \text{ ou } pn : Y :: \sin\varphi : 1 \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} Mn = Y\cos\varphi \\ pp' = X\sin\varphi \\ Cp' = X\cos\varphi \\ p'P = Y\sin\varphi \end{array}\right.$$

Ces valeurs donnent

$$y = X\sin\varphi - Y\cos\varphi,$$
$$x = X\cos\varphi + Y\sin\varphi,$$

où on remplacera Y et X par leurs valeurs calculées ci-dessus.

Pour $\varphi = 0$, et le signe supérieur des valeurs Y et X, on a

$$X = \frac{18}{15} \quad Y = 0;$$

donc

$$y = 0, \quad x = \frac{18}{15} = \frac{6}{5}.$$

Pour le même point F, on a trouvé plus haut le rayon de

courbure $R = \frac{3}{5}$; donc

$$x + R = \frac{15}{5} = 3 = CF,$$

ce qui doit être. Dans la même hypothèse, le signe inférieur donne

$$X = \frac{2}{3}, \quad Y = 0;$$

donc

$$y = 0, \quad x = \frac{2}{3}:$$

or le rayon de courbure pour le point A, c'est-à-dire, $R = \frac{1}{3}$; donc

$$x + R = 1 = CA,$$

autre vérification de la formule.

Enfin des valeurs de y et x en X, Y, $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, trouvées plus haut, on déduit, en élevant au carré et ajoutant,

$$y^2 + x^2 = Y^2 + X^2.$$

La quadrature des courbes rapportées aux coordonnées polaires, est donnée par

$$E = \int \frac{zz}{2}\, d\varphi$$
$$= \left(2\cos^2\varphi \pm 2\cos\varphi + \frac{1}{2}\right) d\varphi:$$

or on a cette formule

$$\int d\varphi \sin^m\varphi \cos^n\varphi = \frac{\sin^{m+1}\varphi \cos^{n-1}\varphi}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int d\varphi \sin^m\varphi \cos^{n-2}\varphi$$

laquelle, pour $m = 0$ et $n = 2$, devient

$$\int d\varphi \cos^2\varphi = \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{2} + \frac{1}{2} \int d\varphi$$
$$= \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{2} + \frac{1}{2}\varphi.$$

d'ailleurs

$$\int\left(\pm 2\cos\varphi d\varphi + \frac{d\varphi}{2}\right) = \pm 2\sin\varphi + \frac{\varphi}{2};$$

donc

$$E = \left\{\sin\varphi\cos\varphi + \varphi \pm 2\sin\varphi + \frac{\varphi}{2}\right\} + const.$$

$$= \left\{\sin\varphi\cos\varphi \pm 2\sin\varphi + \frac{3}{2}\varphi\right\}.$$

En étendant cette intégrale depuis $\varphi = 0$, auquel cas elle s'anéantit, jusqu'à $\varphi = 120°$, angle de la tangente EE' en C à la trisectrice avec CF (fig. 29), on a cette valeur de l'espace $GHCF$, donnée par le signe supérieur,

$$E = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{4} + \sqrt{3} + \frac{3}{2}\text{arc } 120°\right\}$$

$$= \left\{\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\text{circ. } AC\right\}$$

or l'ordonnée AG étant $\sqrt{3}$, valeur donnée pour y, en faisant $x = 1$ dans l'équation (5), on a $\overline{AG}^2 = 3$, et cette valeur de l'aire

$$E = \left(\frac{AG}{2}\right)^2 AG + \text{cercl. } AC = \frac{1}{4}\frac{AG}{AC}\cdot\overline{AG}^2 + \text{cercl. } AC.$$

Le signe inférieur donne

$$E' = \left\{\sin\varphi\cos\varphi - 2\sin\varphi + \frac{3}{2}\varphi\right\} + const.;$$

intégrale qu'on étendra de $\varphi = 0$ à $\varphi = 60°$, et on trouvera pour l'aire CNA

$$E' = \left\{\frac{\sqrt{3}}{4} - \sqrt{3} + \frac{3}{2}\text{arc } 60°\right\}$$

$$= \left\{-\frac{3}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4}\text{circ. } AC\right\} = \frac{1}{2}\text{cercl. } AC - \frac{1}{4}\frac{AG}{AC}\cdot\overline{AG}^2$$

Or en prenant $\frac{22}{7}$ pour le rapport de la circonférence au diamètre $= 1$, la surface du cercle dont le diamètre $= 2$, serait $\frac{22}{7}$, ou $\frac{88}{28}$; tandis que $\frac{1}{4}\frac{AG}{AC}\cdot\overline{AC}^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{21\sqrt{3}}{28}$, donc l'aire désignée par E, ne serait pas tout-à-fait un cercle et demi du rayon AC.

Il résulte de la génération de la courbe des points C' (fig. 29), exposée précédemment, qu'en désignant par z le rayon vecteur de cette courbe, on aura

$$z = CB + 2, \quad z = CB - 2;$$

mais à cause de $CB = \frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi} = 2\cos\varphi$, l'équation sera

$$z = 2\cos\varphi \pm 2;$$

elle suppose la courbe complète, et conséquemment la description par un seul style.

Au moyen de ces relations

$$z = \sqrt{y^2 + x^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}},$$

on passe à cette équation aux coordonnées rectangulaires,

$$y^4 + (2x^2 - 4x - 4y^2 + x^3)(x - 4) = 0.$$

Comme l'axe des abscisses est placé symétriquement dans la courbe, il est la tangente au point de rebroussement C.

Si l'on fait les substitutions

$$z = 2\cos\varphi \pm 2, \quad \frac{dz}{d\varphi} = -2\sin\varphi, \quad \frac{d^2z}{d\varphi^2} = -2\cos\varphi$$

dans cette formule du rayon vecteur

$$R = \frac{\left\{\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 + z^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{2\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 - z\frac{d^2z}{d\varphi^2} + z^2},$$

on aura

$$R = \frac{8\{2 \pm 2\cos\varphi\}^{\frac{3}{2}}}{9 \pm 12\cos\varphi};$$

or φ étant zéro, on a, pour le signe supérieur,

$$R = \frac{64}{21} = 3 + \frac{1}{21}.$$

Mais GX étant $= 4$, on a $CX - R = Co = 1 + \frac{1}{21}$, tandis que $CO = 1 + \frac{1}{3}$: ainsi le point o, centre du cercle osculateur en X, tombe entre A et O à une distance de A, égale au quart, à peu près, de AO.

La quadrature est donnée par la formule

$$\begin{aligned} E &= \int \frac{zz}{2} d\varphi \\ &= \int (2\cos^2\varphi \pm 4\cos\varphi + 2)\, d\varphi \\ &= \{\sin\varphi\cos\varphi \pm 4\sin\varphi + 3\varphi\} + const. \end{aligned}$$

et cette intégrale, pour donner la moitié de l'aire, doit être prise depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = 180°$, parce qu'ainsi que nous l'avons observé, la tangente au point de rebroussement C, se confond avec la ligne CF : on a donc

$$E = 3 \text{ cercl. } AC.$$

Cette aire qui n'est que la moitié de l'aire totale, est aussi la moitié de l'aire d'une cycloïde qui aurait le cercle de AC pour cercle générateur.

M. *Legendre* a trouvé

$$\frac{\pi}{2} EF(\overline{BE}^2 + \overline{DF}^2) + \frac{1}{6}\pi\overline{EF}^3$$

pour l'expression du volume du segment produit par la révo-

lution de l'espace circulaire $BMDFE$ autour de AC (fig. 35), π étant la circonférence dont le diamètre est l'unité.

Supposons $BE = 0$, et DF en $D'F'$: désignons OF' par x et le rayon AO par r. L'expression ci-dessus deviendra

$$\frac{\pi}{2}(r+x)\overline{D'F'}^2 + \frac{1}{6}\pi(r+x)^3 :$$

or, à cause de la propriété

$$AF' \text{ ou } r+x : D'F' :: D'F' : F'C \text{ ou } r-x,$$

on aura

$$\frac{\pi}{2}(r+x)^2(r-x) + \frac{1}{6}\pi(r+x)^3$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{1}{3}\pi\left\{(r+x)^2\left[\frac{3}{2}(r-x) + \frac{1}{2}(r+x)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\pi(r+x)^2(2r-x) = \frac{1}{3}\pi\{2r^3 + 3r^2 - x^3\} \ldots\ldots (L)$$

Ensorte que dénotant le grand segment par P et le petit par S, on aura ces expressions des deux segmens,

$$P = \frac{1}{3}\pi\{2r^3 + 3r^2x - x^3\},$$

$$S = \frac{1}{3}\pi\{2r^3 - 3r^2x + x^3\},$$

en observant que $P + S =$ vol. de la sphère $= \frac{4\pi}{3}r^3$. On déduit de là $P - S = \frac{\pi}{3}(6r^2x - 2x^3)$; et cette proportion

$$\frac{2}{3}\pi(3r^2x - x^3) : \frac{4\pi}{3}r^3 :: P - S : P + S,$$

qui donne

$$x^3 - 3r^2x + r^2 \cdot 2r\left(\frac{P-S}{P+S}\right) = 0 \ldots\ldots (M)$$

laquelle comparée à la formule générale

$$x^3 + px + q = 0,$$

donne p essentiellement négatif,

$$\frac{p^3}{27} = r^6,\ \frac{q^2}{4} = r^6.\left(\frac{P-S}{P+S}\right)^2,$$ et, à cause de $\frac{P-S}{P+S}$ moindre que l'unité, on a cette relation

$$\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}.$$

Ainsi l'équation tombe dans le cas irréductible ; conséquemment ses trois racines sont essentiellement réelles.

Cette équation répond à la trisection d'un arc φ qui aurait pour corde $m = 2r\left(\frac{P-S}{P+S}\right)$ dans le cercle du rayon $= r$; de sorte que l'une des racines est la corde de l'arc $\frac{\varphi}{3}$, et les deux autres sont les cordes respectives des arcs $\frac{2\pi+\varphi}{3}$, $\frac{4\pi+\varphi}{3}$, π étant la demi-circonférence (2e sect. Alg.)

Maintenant, si l'on interprête ces trois racines, on observera que la corde m de l'arc φ, étant $2r\left(\frac{P-S}{P+S}\right)$, et par conséquent $< 2r$, l'arc φ est moindre que la demi-circonférence, et $\frac{\varphi}{3}$ moindre que le sixième de la circonférence ; donc la racine

$$x = \text{cord.}\frac{\varphi}{3}$$

est $<$ que le côté de l'hexagone, ou $< r$; et les deux autres racines

$$x' = \text{cord.}\frac{2\pi+\varphi}{3},\quad x'' = \text{cord.}\frac{4\pi+\varphi}{3}$$

sont plus grandes que le rayon.

La première racine est la seule qui appartienne à la question proposée, et les deux autres doivent résoudre une autre question analogue. Pour s'en assurer, désignons (fig. 36) par u le volume d'un corps engendré par le segment AMP d'une courbe tournant autour de l'axe AX; le volume de ce segment est donné par la formule

$$u = \pi \int y^2 dx,$$

π étant la demi-circonférence, et y l'ordonnée pour l'abscisse $CP = x$ comptée de l'origine C.

Or, pour l'hyperbole équilatère dans laquelle le demi-axe est r, on sait que

$$y^2 = x^2 - r^2;$$

donc

$$u = \pi \int (x^2 - r^2)\, dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} - r^2 x + C\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}(x^3 - 3r^2 x + C'),$$

$C = 3C$ étant la constante qu'on déterminera d'après cette considération que, pour $x = r = CA$, on doit avoir $u = 0$, d'où $C' = \frac{2\pi r^3}{3}$, et conséquemment

$$u = \frac{\pi}{3}(x^3 - 3r^2 x + 2r^3) \ldots\ldots (2)$$

expression qui est précisément celle du petit segment sphérique que nous avons désigné par S, en observant que le segment de l'hyperbole que nous considérons, a pour flèche $x - r$, tandis que, dans la sphère, la flèche est $r - x$.

Qu'on change dans (2) x en $-x$, et on retrouvera l'expression du grand segment sphérique P, ayant pour flèche $-x - r$, ou $x + r$, à ne prendre que sa longueur absolue.

Faisons dans l'équation (M) $r = 1$ et $m = 0$, ce qui correspond au rapport $\frac{P - S}{P + S} = 0$, d'où résulte $P = S$; l'équa-

tion aura pour racines $x = 0$, $x = \pm \sqrt{3}$: ici les arcs triples dont la corde est toujours nulle, sont 0°, $0° + 360°$, $0° + 2.360°$. Ainsi, pour la sphère, la section doit passer par le centre, et pour l'hyperbole, les sections seront faites à des distances du centre, égales à $\pm \sqrt{3}$. Les segmens correspondans sont, pour $x = \sqrt{3}$,

$$u = \frac{2\pi}{3},$$

et pour $x = -\sqrt{3}$,

$$u = \frac{2\pi}{3},$$

dont la somme $= \frac{4\pi}{3} =$ volume de la sphère pour le rayon $= 1$.

Ainsi le rapport entre les segmens, étant donné, on connaîtra la corde de l'arc triple, qui est $2\left(\frac{P-S}{P+S}\right)$ pour le rayon égal à l'unité : ayant donc construit une trisectrice pour ce rayon, on aura les cordes des trois arcs tiers ; celle de ces trois cordes qui sera moindre que le rayon, portée (fig. 37) de C en P, donnera la position du plan de section pour la sphère ; les deux autres, portées de C en P' et en P'', dans les deux sens, donneront celle du plan coupant pour l'hyperboloïde, et les deux segmens qui en résulteront, composeront en somme le volume de la sphère.

Le problème dont il s'agit étant proposé pour l'ellipsoïde de révolution, conduit absolument à la même équation. Ainsi, en nommant r le demi-grand axe de l'ellipse, on a pour déterminer l'apothême des deux segmens qui sont entre eux comme P est à S, cette équation

$$x^3 - 3r^2x + r^2 \cdot 2r\left(\frac{P-S}{P+S}\right) = 0 ;$$

et comme le second axe n'entre pas ici, on peut conclure qu'on aura toujours les mêmes solutions pour les ellipsoïdes

de révolution de même axe r, et pour tous les hyperboloïdes conjugués, puisque l'équation de l'ellipse ne diffère de celle de l'hyperbole que par le signe du carré du demi-second axe.

La suite des signes de l'équation

$$x^3 - 3r^2x + r^2 \cdot 2r\left(\frac{P-S}{P+S}\right) = 0,$$

dont on sait d'avance que toutes les racines sont réelles, et l'absence du second terme, montrent que deux racines sont positives et la troisième négative, et que celle-ci est égale à la somme des deux premières. On prendra donc les deux plus petites cordes, x et x'' en plus, et x' en moins : la première, portée à droite, à partir du centre, sur le diamètre, répondra à deux segmens sphériques qui sont entre eux comme P à S; la deuxième, portée du même côté sur la même ligne, répondra au segment hyperbolique égal au segment sphérique adjacent; et la troisième, portée à gauche, répondra dans l'autre partie de l'hyperboloïde, à un segment égal au second segment sphérique adjacent; de sorte que ces deux segmens de l'hyperboloïde, seront aussi entre eux comme P à S, et que leur somme sera égale au volume de la sphère proposée.

Autre génération de la Trisectrice.

On a déjà dit que la trisectrice était engendrée par le point A milieu du diamètre mobile CAM, lorsque son extrémité M décrivait la circonférence $MM'CM''$, et que ce diamètre était assujéti à passer toujours par le point C; d'où résultait en même temps la courbe des points C'.

Mais (fig. 38) en conservant ce premier mouvement du diamètre CAM, si l'on conçoit un autre diamètre CAM, qui n'ait que la liberté de tourner autour du point A fixe de position, ensorte que l'extrémité M reste toujours commune aux deux

diamètres ; qu'on mette ce point M en mouvement, et qu'on le suppose dans une position M', ces deux diamètres formeront les deux côtés égaux $M'AM''$, $M'CC'$ du triangle isoscèle $CM'M''$, dont la base $C'M''$, toujours double de la corde AA' de l'arc AO tiers de l'arc AOI, est divisée également en S par la circonférence qui sert de directrice au point M.

On observera que l'arc AO et son triple AOI résultent nécessairement de la position que prennent en même temps les trois points M', M'', C'.

Que des deux diamètres CAM superposés d'abord dans la position primitive CAM, et liés l'un à l'autre au point M autour duquel ils ont la faculté de tourner, l'un se meuve autour de A, tandis que l'autre glisse sur C, et trace par cette extrémité la courbe des points C', il est clair que la ligne qui lie toutes les positions de A, en tant que ce point appartient au diamètre qui glisse sur C, avec toutes celles de C extrémité du diamètre qui tourne sur A, décrira par A la courbe trisectrice, et par C la circonférence directrice $CM''MM'C$.

Nous observerons, en premier lieu, que la ligne AC, continuellement variable de longueur, et dont nous venons de définir la propriété des points extrêmes, est toujours l'une des deux diagonales égales du trapèze $AA'C'M''$, telle que $A'M''$, ou bien encore la grande diagonale du parallélogramme $AA'SM''$, dans lequel les côtés opposés AM'', $A'S$ sont égaux au rayon, et dont les deux autres AA', $M''S$ sont chacun la corde de l'arc AO tiers de AOI, parallélogramme dont la petite diagonale AS est d'ailleurs toujours égale au rayon ; en second lieu, que ces deux diagonales se coupent également dans une suite de points V, qui sont à une circonférence décrite de A comme centre avec la moitié de AC, ou avec AD comme rayon.

Ainsi, pendant que le point A décrit la trisectrice, et que

le point C parcourt la circonférence, le milieu D de AC décrit une autre circonférence concentrique avec le rayon que nous venons d'assigner.

La ligne $M'M''$ étant perpendiculaire en A à la ligne AC dans sa position primitive, et conséquemment tangente au point A de la trisectrice; si l'on conçoit que, dans toutes les positions que prend la ligne AC, correspondantes aux mouvemens de ses points extrêmes, $M'M''$ lui reste toujours perpendiculaire à l'extrémité A qui décrit la courbe, il s'agira de prouver que cette perpendiculaire est continuellement tangente à la trisectrice : mais c'est ce dont nous n'avons pu jusqu'ici trouver une démonstration directe et rigoureuse, quoique la chose puisse paraître hors de doute à quiconque aura réfléchi sur la génération de la Trisectrice que nous venons d'exposer : car cette courbe étant engendrée par un mouvement de rotation de l'extrémité A de la ligne AC, dont le milieu décrit une demi-circonférence, il paraît évident que la perpendiculaire à l'extrémité A, dans toutes les positions de AC, laisse continuellement au-dessous d'elle les deux élémens de la courbe, voisins à droite et à gauche du point commun A, propriété qui, comme on le sait, définit une tangente.

FIN.

668130

Biblioteca Nazionale V. E. III. NAPOLI

RÉCAPITULATION

Des Ouvrages qui ont été imprimés chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Sciences, à Paris, quai des Augustins, n° 57, depuis le 15 janvier 1807, jusqu'au 15 avril 1808.

	Prix pr Paris.		Prix fr. de port.	
Formats in-4°.				
LAGRANGE. Résolution des Equations numériques, nouvelle édition, revue et augmentée par l'auteur.	12 f.	c.	14 f.	c.
Tables Astronomiques publiées par le Bureau des Longitudes de France : — Nouvelles Tables de Jupiter et de Saturne, calculées d'après la Théorie de M. LAPLACE, et suivant la division décimale de l'angle droit; par M. BOUVARD : — Nouvelles Tables écliptiques des satellites de Jupiter, d'après la Théorie de M. LAPLACE, et la totalité des Observations faites depuis 1662, jusqu'à l'an 1802 ; par M. DELAMBRE.	18			
LAPLACE. Exposition du Système du Monde, avec le portrait de l'auteur, troisième édition, 1 vol.	15		18	
Le même, 2 vol. in-8°. sans portrait.	12		15	
CAGNOLI. Traité de Trigonométrie, trad. de l'italien, par M. Chompré, deuxième édition. 1 vol.	18		22	
GAUSS. Recherches Arithmétiques, trad. par M. Poulet-Delisle, Professeur de Mathématiques. 1 vol.	18		22	
MONTEIRO-DA-ROCHA, Commandeur de l'Ordre du Christ, etc. Mémoires sur l'Astronomie pratique, trad. du portugais par M. de Mello, Prof. de Mathém.	7	50	9	50
PUISSANT. Traité de Topographie, d'Arpentage et de Nivellement, avec six planches. 1 vol.	15		18	
Le même auteur (M. Puissant) a publié en 1805 un Traité de Géodésie, ou Exposition des Méthodes astronomiques et trigonométriques, appliquées soit à la mesure de la terre, soit à la confection du canevas des cartes et des plans, avec huit planches. 1 vol.	18		22	
Formats in-8°.				
OEuvres de M. LACROIX, *membre de l'Institut et de la Légion d'honneur.*				
Cours de Mathématiques à l'usage de l'Ecole centrale des Quatre-Nations, ouvrage adopté par le Gouvernement, pour les Lycées et les Ecoles secondaires. 7 vol.	28	50		
Chaque volume se vend séparément, savoir :				
Traité élémentaire d'Arithmétique, 7e édition. 1 vol.	2		2	50
Elémens d'Algèbre, 6e édition. 1 vol.	4		5	50
Elémens de Géométrie, 7e édition. 1 vol.	4		5	50
Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'application de l'Algèbre à la Géométrie, 4e édition. 1 vol.	4		5	50
Complément des Elémens d'Algèbre, 3e édition. 1 vol.	4		5	50
Complément des Elémens de Géométrie, ou Elémens de Géométrie descriptive, seconde édition. 1 vol.	3		4	25
Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral, seconde édition. 1 vol.	7	50	10	
Essais sur l'Enseignement en général, et sur celui des Mathématiques en particulier, ou Manière d'étudier et d'enseigner les Mathématiques. 1 vol.	5		6	50

	Prix pr Paris.	Prix fr. de port.
GARNIER, ex-Professeur à l'Ecole Polytechnique. Elémens d'Algèbre à l'usage des Aspirans à l'Ecole Polytechnique. Première Section, 2e édition. 1 vol.	5	6 50
Seconde Section. 1 vol.	4	5 50
Essai de Géométrie analytique, avec sept planches. 1 vol.	4	5 50
Les Réciproques de la Géométrie, avec neuf planches.	3 50	5
BUDAN. Nouvelle Méthode pour la résolution des équations numériques d'un degré quelconque, etc.	5	6
BEXON. Application de la théorie de la Législation pénale, etc. 1 vol. *in-folio.*	36	
CLAIRAUT. Théorie de la Figure de la Terre, avec figures imprimées dans le texte, conformes à l'original. 1 vol.	10 f. c.	11 f. c.
EULER. Elémens d'Algèbre, nouvelle édition. La première partie augmentée de Notes par M. Garnier; la deuxième partie augmentée de Notes par M. Lagrange, Sénateur, revues par l'auteur. 2 vol.	12	15
VOLNEY, Sénateur. Voyage en Syrie et en Egypte, pendant les années 1783, 84, 85. 2 vol.	12	15
L'avantage qu'a cette quatrième édition sur les précédentes, est la correction que l'on a faite à la carte d'Egypte.		
Les Ruines, ou Méditations sur les révolutions des Empires, augmentées du Catéchisme de la Loi naturelle, quatrième édition. 1 vol. avec cartes.	6	7 50

On trouve à la même adresse tous les ouvrages du même auteur.

LEFEVRE. Nouveau Traité de l'Arpentage, nouvelle édition. 2 vol. avec 25 planches. 12 fr. et 15 fr. franc de port.

A. A. L. REYNAUD, ancien Elève de l'Ecole Polytechnique, actuellement Répétiteur à cette Ecole, Professeur d'Analyse à l'Ecole Polymatique et à l'Athénée de Paris (ci-devant Lycée Républicain), Professeur et Examinateur du Cadastre. Trigonométrie analytique, précédée de la théorie des Logarithmes, et suivie des Tables de Logarithmes des nombres et des lignes trigonométriques, par Lalande; à l'usage des Ingénieurs du Cadastre et des Elèves qui se destinent à l'Ecole Polytechnique (Ouvrage suivi à cette Ecole), 2e tirage. 1 vol. 2 fr. 50 cent. et 3 fr. franc de port.

Élémens d'Algèbre, par le même. Vol. in-8, août 1808. Prix, 5 fr.

ROY, ancien adjudant de Cuirassiers. Elémens d'équitation militaire, ouvrage utile à ceux qui se destinent à cet art, nouvelle édition. 1 vol. 2 fr. 50 cent. et 3 fr. franc de port.

Description topographique et statistique de la France, contenant, avec la carte de chaque Département, l'analyse des objets qui en forment la consistance territoriale, civile et politique; ainsi que la Notice des antiquités, des mœurs, de l'industrie, des productions et des établissemens publics de chacun de ces Départemens.

Par J. PEUCHET et P.-G. CHANLAIRE, membres de l'Académie Celtique de France, etc. — Les Départemens ci-après dénommés sont imprimés, savoir: *La Roër, la Vienne, les Bouches-du-Rhône, le Var, le Jura, l'Eure et Loire, la Seine-Inférieure, le Bas-Rhin, la Côte-d'Or.*

Le prix de la Notice de chaque Département, avec la carte, est de 2 f. 80 c. quand la Notice n'aura que deux feuilles, et de 3 fr. quand la Notice aura plus de deux feuilles.

On délivre la carte, si on le desire, séparément de la Notice; le prix en est fixé à 2 fr. à Paris; 2 fr. 10 cent. franc de port.

Œuvres d'Archimède, 1 vol. in-4° fig. en bois. 1807. 36 fr.